I: EL ESPACIO VECTORIAL DE LOS VECTORES LIBRES DEL ESPACIO

1.- Vectores fijos en el espacio.

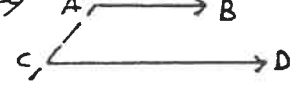
Sea E el espacio de puntos de la geometría ordinaria.

Definición.- Un vector fijo es un par de elementos de E dado en un cierto orden. Al vector fijo (A, B) lo denotamos $\overrightarrow{AB}$. El primer punto es el origen del vector y el segundo el extremo.

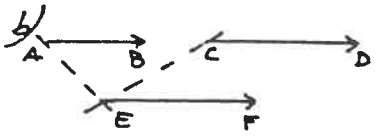
Los vectores fijos $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, ... en los que el origen coincide con el extremo se llaman vectores fijos nulos.

Las características de un vector fijo son:

* Se llama módulo del vector fijo $\overrightarrow{AB}$, y se denota $|\overrightarrow{AB}|$, a la longitud del segmento de extremos A y B.
* Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ no nulos tienen la misma dirección, y se escribe $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$, si están en la misma recta o en rectas paralelas
* Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ no nulos que tienen la misma dirección tienen el mismo sentido, y se escribe $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{CD}$, si se cumple una de las dos condiciones siguientes:

a) 

Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ están en rectas paralelas, la recta que pasa por los orígenes deja a los extremos en el mismo semiplano.

b) 

Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ están en la misma recta, existe otro vector $\overrightarrow{EF}$ situado en una paralela tal que $\overrightarrow{AB} \uparrow \overrightarrow{EF}$ y $\overrightarrow{CD} \uparrow \overrightarrow{EF}$ según el apartado a).

* Punto de aplicación de un vector fijo es su origen.

Evidentemente, todos los vectores fijos nulos tienen de módulo 0; convenimos que todos ellos tienen la misma dirección y sentido.

2.- Relación de equipolencia. Vector libre.

Definición: Dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, y se escribe $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, si tienen el mismo módulo la misma dirección y el mismo sentido.

La relación de equipolencia es una relación de equivalencia que nos clasifica el conjunto de los vectores fijos. Cada clase está formada por todos los vectores fijos equipolentes entre sí.

Definición: Se llama vector libre del espacio al conjunto de todos los vectores fijos equipolentes a uno dado. A cualquier elemento del conjunto se le llama representante del vector libre.

Al vector libre formado por todos los vectores fijos nulos se le llama vector cero y se representa $\vec{0}$.

El conjunto de todos los vectores libres del espacio se designa $V^3(\mathbb{R})$.

Al vector libre de representante el vector fijo $\overrightarrow{AB}$ lo denotamos $(\overrightarrow{AB})$. Si no deseamos especificar ningún representante representaremos los vectores libres con letras minúsculas $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$.

$$(\overrightarrow{AB}) = \{\overrightarrow{CD} \mid \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}\}$$

$$\vec{0} = \{\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots\}$$

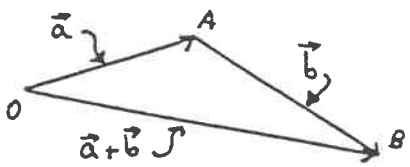
Definición: Se llama módulo, dirección y sentido de un vector libre al módulo, dirección y sentido de cualquier representante.

Propiedad fundamental de los vectores libres.- Cualquier vector libre $\vec{a}$ tiene un único representante con origen en un punto arbitrario O.

3.- Operaciones en $V^3(\mathbb{R})$.

a) Suma de vectores libres.

Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores libres y O un punto del plano. Sea $\overrightarrow{OA}$ el único representante de $\vec{a}$ con origen O y $\overrightarrow{AB}$ el único representante de $\vec{b}$ con origen A. Se llama suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, y se designa $\vec{a}+\vec{b}$, al vector libre de representante $\overrightarrow{OB}$.



$$\vec{a}+\vec{b} = (\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OB})$$

La suma de vectores libres es independiente del punto elegido para efectuarla. Además, el conjunto $V^3(\mathbb{R})$ con la suma así definida tiene estructura de grupo conmutativo.

b) Producto de un nº real por un vector.

Se llama producto del nº real α por el vector libre $\vec{a}$, y se designa $\alpha\vec{a}$, al vector:

* $\alpha\vec{a} = \vec{0}$ si $\alpha = 0$ ó $\vec{a} = \vec{0}$

* $\alpha\vec{a}$ si $\alpha \neq 0$ y $\vec{a} \neq \vec{0}$ verifica $\begin{cases} |\alpha\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}| \\ \alpha\vec{a} \parallel \vec{a} \\ \alpha\vec{a} \uparrow \vec{a} \text{ si } \alpha > 0 \text{ y } \alpha\vec{a} \downarrow \vec{a} \text{ si } \alpha < 0 \end{cases}$

Con esta operación y la suma ya definida, $V^3(\mathbb{R})$ tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

4.- Algunos teoremas.

TEOREMA.- Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores libres distinto de $\vec{0}$. Son equivalentes

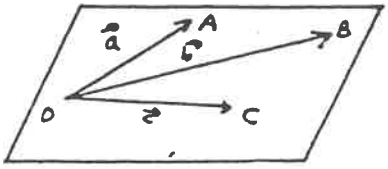
i) $\vec{a} \parallel \vec{b}$

ii) $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente dependientes

TEOREMA.- Sean $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$ vectores libres. Son equivalentes:

a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son linealmente dependientes.

b) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son coplanarios (es decir, sus representantes con origen común están en un mismo plano).

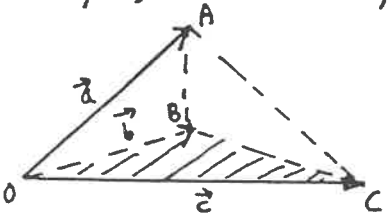


$\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son linealmente dependientes.

Un enunciado equivalente sería el contrario: Son equivalentes.

a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son linealmente independientes

b) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ no son coplanarios



$\Leftrightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ son linealmente independientes.

TEOREMA.- Cuatro vectores en el espacio son siempre linealmente dependientes.

De los dos últimos teoremas se deduce el siguiente.

TEOREMA.- Tres vectores libres no nulos y no coplanarios son base de $V^3(\mathbb{R})$.

Por tanto, la dimensión de $V^3(\mathbb{R})$ es 3.

5.- Coordenadas.

Definición.- Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ una base de $V^3(\mathbb{R})$, todo vector libre $\vec{a}$ se puede escribir de forma única como combinación lineal de los elementos de B, $\vec{a} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$. La terna (x, y, z) se llama coordenadas de $\vec{a}$ en la base B.

Si tenemos fijada una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ se pueden hacer las operaciones con vectores libres a través de sus coordenadas.

[a] Suma de vectores libres: las coordenadas del vector suma son la suma de las coordenadas de los sumandos.

$\vec{a}(x, y, z)$ y $\vec{b}(x', y', z') \Rightarrow \vec{a} + \vec{b}(x + x', y + y', z + z')$

[b] Producto de un nº real por un vector.- las coordenadas del vector $\alpha\vec{a}$ son las coordenadas de $\vec{a}$ multiplicadas por α.

$\vec{a}(x, y, z) \Rightarrow \alpha\vec{a}(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ $\alpha \in \mathbb{R}$

II.- SISTEMA DE REFERENCIA AFÍN.

DEF.- Sea E el conjunto de puntos del espacio y $V^3(\mathbb{R})$ el espacio de los vectores libres asociado. De E diremos que es un espacio af ya que cumple:

a) Para cada tres puntos A, B y C: $(\vec{AB}) + (\vec{BC}) = (\vec{AC})$

b) Para cada punto A y cada vector libre $\vec{v}$, existe un único punto B tal que $(\vec{AB}) = \vec{v}$.

Al espacio afín E se le denota $E^3(\mathbb{R})$.

TEOREMA.- Sea O un punto fijo. La aplicación $\varphi_0 : E^3(\mathbb{R}) \longrightarrow V^3(\mathbb{R})$, $A \rightsquigarrow \varphi_0(A) = (\vec{OA})$ es biyectiva.

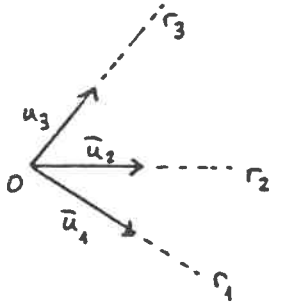
Demostración:

i) Es inyectiva: si A y B son dos puntos distintos, sus imágenes $(\vec{OA})$ y $(\vec{OB})$ son distintas.

ii) Es suprayectiva: si $\vec{v} \in V^3(\mathbb{R})$ y O es un punto fijo, existe un único representante de $\vec{v}$ con origen O; sea éste $\vec{OA}$. Por tanto, $\varphi_0(A) = (\vec{OA}) = \vec{v}$.

Definición.- Al vector libre $(\vec{OA})$ se le llama vector de posición del punto A respecto de O.

Definición.- Sea O un punto fijo de $E^3(\mathbb{R})$ y $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ una base de $V^3(\mathbb{R})$. Se llama sistema de referencia afín a la terna $R = \{O; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$.



Dibujamos los únicos representantes de $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ con origen O. A las rectas r_1, r_2, r_3 se les llama ejes del sistema y a O origen de coordenadas.

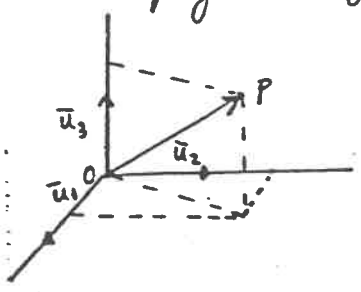
r_1 es el 1er eje o eje de abscisas.

r_2 es el 2º eje o eje de ordenadas

r_3 es el 3er eje o eje de cotas.

III.- COORDENADAS DE UN PUNTO. APLICACIONES.

Supongamos fijado un sistema de referencia afín $R\{O; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$



Dado cualquier punto P de $E^3(\mathbb{R})$ le corresponde su vector de posición $(\vec{OP})$. Además, como B es base podemos escribir: $(\vec{OP}) = x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2 + z\bar{u}_3$

Por tanto, fijado R se cumple:

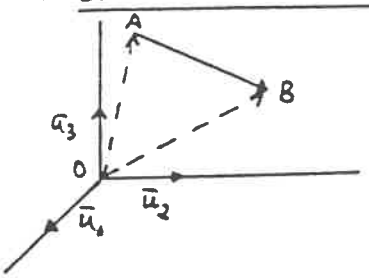
$$E^3(\mathbb{R}) \longrightarrow V^3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$P \rightsquigarrow (\vec{OP}) \rightsquigarrow (x, y, z)$$

Definición: Sea $\mathcal{R} = \{O; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ un sistema de referencia afín. Se llaman coordenadas del punto P a las coordenadas de su vector de posición $(\overrightarrow{OP})$.

Es decir: $P(x,y,z) \Leftrightarrow (\overrightarrow{OP}) = x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2 + z\bar{u}_3$

De esta definición se deducen las siguientes consecuencias:

1.- **Coordenadas de un vector libre $(\overrightarrow{AB})$.**



Consideremos un sistema de referencia $\mathcal{R}\{O; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ fijo. Se verifica:

$A(x,y,z) \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}) = x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2 + z\bar{u}_3$

$B(x',y',z') \Leftrightarrow (\overrightarrow{OB}) = x'\bar{u}_1 + y'\bar{u}_2 + z'\bar{u}_3$

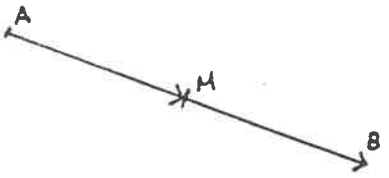
Como, además, se cumple $(\overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OB}) \Rightarrow (\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OA}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AB}) = x'\bar{u}_1 + y'\bar{u}_2 + z'\bar{u}_3 - x\bar{u}_1 - y\bar{u}_2 - z\bar{u}_3 = (x'-x)\bar{u}_1 + (y'-y)\bar{u}_2 + (z'-z)\bar{u}_3$

Es decir: las coordenadas del vector $(\overrightarrow{AB})$ son las coordenadas de su extremo B menos las de su origen A.

1.- Consecuencia: Dos vectores equipolentes tienen las mismas coordenadas.

2.- **Coordenadas del punto medio de un segmento.**



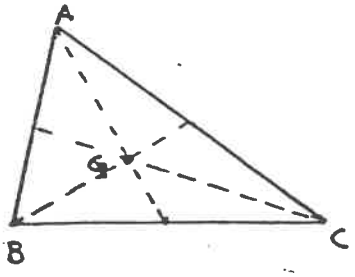
Consideremos un sistema de referencia $\mathcal{R}\{O; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ fijo. Sea M el punto medio de AB. Si las coordenadas de A, B y M son, respectivamente, (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) y (x_m, y_m, z_m), como $(\overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{MB})$ se verifica:

$$(x_m - x_0, y_m - y_0, z_m - z_0) = (x_1 - x_m, y_1 - y_m, z_1 - z_m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_m - x_0 = x_1 - x_m \\ y_m - y_0 = y_1 - y_m \\ z_m - z_0 = z_1 - z_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_m = x_0 + x_1 \\ 2y_m = y_0 + y_1 \\ 2z_m = z_0 + z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m = \frac{x_0 + x_1}{2} \\ y_m = \frac{y_0 + y_1}{2} \\ z_m = \frac{z_0 + z_1}{2} \end{cases}$$

Es decir: las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de los extremos.

3.- **Coordenadas del baricentro de un triángulo.**



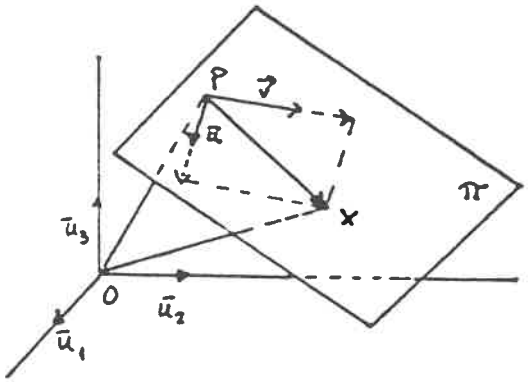
Sea $\mathcal{R} = \{O; \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ un sistema de referencia afín. Si las coordenadas de A, B, C y G son, respectivamente, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) y (x_G, y_G, z_G) se verifica:

$$x_G = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \quad y_G = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \quad z_G = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$$

(Su demostración)

III.- EL PLANO EN EL ESPACIO AFÍN.

Sea $\mathcal{R}\{0; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ un sistema de referencia afín y π un plano.



El plano π queda determinado si se conocen:

a) Uno de sus puntos: $P(x_0, y_0, z_0)$

b) Dos vectores paralelos al plano, distintos de $\vec{0}$ y de distinta dirección:

$\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ vectores direccionales

A la terna $(P, \vec{u}, \vec{v})$ se le llama determinación lineal del plano π y se escribe $\pi(P, \vec{u}, \vec{v})$

1.- Ecuación vectorial del plano.

Sea X un punto cualquiera del espacio. La condición necesaria y suficiente para que el punto X pertenezca al plano π es que los vectores $(\vec{PX})$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean coplanarios, o lo que es lo mismo que sean linealmente dependientes. Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son linealmente independientes debe suceder: $(\vec{PX}) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Además, se verifica siempre $(\vec{OX}) = (\vec{OP}) + (\vec{PX})$. Por tanto

$X \in \pi \Leftrightarrow$ existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que $\boxed{(\vec{OX}) = (\vec{OP}) + \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}}$

A la expresión anterior se le llama ecuación vectorial del plano.

2.- Ecuaciones paramétricas del plano

Si en la ecuación vectorial sustituimos las coordenadas de P, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ y llamamos (x, y, z) a las coordenadas de X se obtiene:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(u_1, u_2, u_3) + \beta(v_1, v_2, v_3) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

y ésta a su vez se puede desglosar en otras tres:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha u_1 + \beta v_1 \\ y &= y_0 + \alpha u_2 + \beta v_2 \\ z &= z_0 + \alpha u_3 + \beta v_3 \end{aligned}\right\} \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

que se llaman ecuaciones paramétricas del plano $\pi(P, \vec{u}, \vec{v})$

3.- Ecuación general o implícita del plano.

Sabemos que $X \in \pi(P, \vec{u}, \vec{v}) \Leftrightarrow (\vec{PX}), \vec{u}, \vec{v}$ son linealmente dependientes, es decir:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Si desarrollamos el determinante por la primera fila se obtiene.

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - (y-y_0)\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + (z-z_0)\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

y si operamos nos queda una ecuación del tipo:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad , \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

que es la ecuación general o implícita del plano π.

* Hay que notar que los coeficientes A, B y C del plano π sólo dependen de los vectores direccionales del plano $\vec{u}$ y $\vec{v}$ mientras que D también depende del punto P.

Por tanto, si queremos calcular la ecuación de un plano π' paralelo a π que pase por Q, como $(Q, \vec{u}, \vec{v})$ será una determinación lineal de π' la ecuación es del tipo

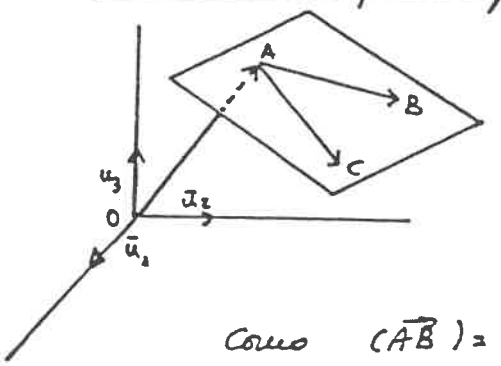
$$Ax + By + Cz + D' = 0$$

Ejemplo: Hallar la ecuación del plano que pasando por Q(1,2,3) es paralelo a $\pi \equiv 2x - 3y + 2z - 8 = 0$.

La ecuación de π' es del tipo $2x - 3y + 2z + D = 0$ y pasa por Q $\Rightarrow$ $2 - 6 + 6 + D = 0 \Rightarrow D = -2$.

El plano π' es: $2x - 3y + 2z - 2 = 0$

4.- Ecuación del plano que pasa por tres puntos no alineados.



Sean $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $C(c_1, c_2, c_3)$ tres puntos del espacio no alineados y π el plano que determinan.

Evidentemente, $(A, (\vec{AB}), (\vec{AC}))$ es una determinación lineal del plano π

Como $(\vec{AB}) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$

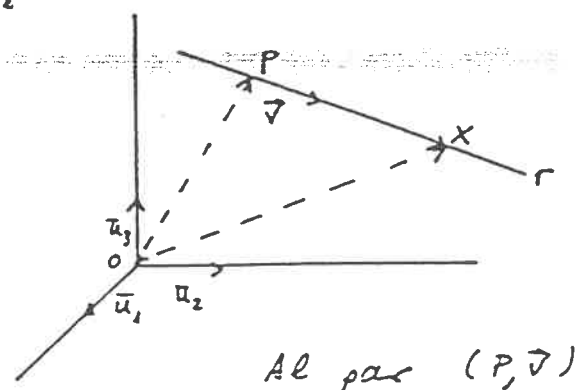
$(\vec{AC}) = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$

la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & b_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

Expresión que, después de hacer las operaciones, nos da la ecuación general del plano π.

Sea $R=\{O;\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ un sistema de referencia afín y r una recta.



La recta r queda perfectamente determinada si se conocen:

a) Uno de sus puntos $P(x_0, y_0, z_0)$.

b) Un vector de dirección (es decir, un vector distinto de cero y paralelo a la recta) $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$

Al par $(P, \vec{v})$ se le llama determinación lineal de la recta r y se escribe $r(P, \vec{v})$.

1.- Ecuación vectorial de la recta.

La condición necesaria y suficiente para que un punto cualquiera X pertenezca a la recta es que exista un nº real α tal que $(\vec{PX}) = \alpha\vec{v}$.

Además, se verifica siempre $(\vec{OP}) + (\vec{PX}) = (\vec{OX})$. Por tanto:

$X \in r \iff$ existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(\vec{OX}) = (\vec{OP}) + \alpha\vec{v}$

A esta expresión se le llama ecuación vectorial de la recta $r(P, \vec{v})$.

2.- Ecuaciones paramétricas de la recta

Si en la ecuación vectorial sustituimos las coordenadas de P y $\vec{v}$ y llamamos (x, y, z) las coordenadas de X se obtiene:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \alpha(v_1, v_2, v_3), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

y descomponiendo en coordenadas:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha v_1 \\ y &= y_0 + \alpha v_2 \\ z &= z_0 + \alpha v_3 \end{aligned}\right\} \alpha \in \mathbb{R}$$

que son las ecuaciones paramétricas de la recta $r(P, \vec{v})$

3.- Ecuación continua de la recta.

Si las tres coordenadas de $\vec{v}$ (v_1, v_2, v_3) son distintas de cero, se puede despejar α en las ecuaciones paramétricas, y queda:

$$\alpha = \boxed{\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}}$$

que es la ecuación continua de la recta.

En el caso de que alguna de las coordenadas de $\bar{v}(v_1, v_2, v_3)$ sea igual a 0, también se puede escribir la ecuación continua, aunque su significado no sea que se divide por 0, sólo significará que al realizar las correspondientes multiplicaciones se obtienen las ecuaciones paramétricas.

De esta forma la ecuación continua se puede utilizar en todos los casos.

Ejemplo.- Si $v_1 = 0$ $\quad \dfrac{x-x_0}{0} = \dfrac{y-y_0}{v_2} = \dfrac{z-z_0}{v_3} = \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + 0\cdot\alpha \\ y = y_0 + \alpha \cdot v_2 \\ z = z_0 + \alpha v_3 \end{cases}$

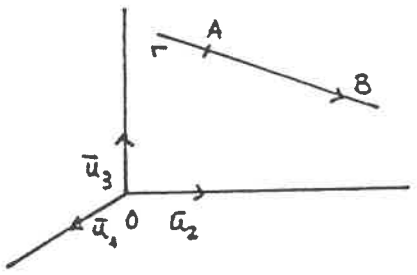
4.- Ecuaciones implícitas.

Si en la ecuación continua tomamos las igualdades de dos en dos y operamos quedan, por ejemplo, expresiones del tipo: $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'y+b'z+c'=0 \end{cases}$ (*).

En general, dos planos $\left.\begin{matrix} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{matrix}\right\}$ (*) representan una recta si rango $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$.

Las ecuaciones (*) se llaman ecuaciones implícitas de la recta y, en ellas, la recta viene dada como intersección de dos planos.

5.- Ecuación de la recta que pasa por dos puntos.



Sean $A(a_1, a_2, a_3)$ y $B(b_1, b_2, b_3)$ dos puntos del espacio y r la recta que determinan. Evidentemente $(A, (\vec{AB}))$ es una determinación lineal de r.

Como $(\vec{AB}) = (b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$ podemos escribir cualquiera de las ecuaciones de la recta.

Por ejemplo, su ecuación continua será

$$\frac{x-a_1}{b_1-a_1} = \frac{y-a_2}{b_2-a_2} = \frac{z-a_3}{b_3-a_3}$$

VI.- POSICIÓN RELATIVA DE DOS PLANOS.

Consideremos los planos $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ y $\pi' \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$

Su intersección, si existe, estará formada por aquellos puntos cuyas coordenadas satisfagan las dos ecuaciones.

Es decir, la intersección está formada por los puntos solución del sistema.

Sean $M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ y $\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$

Si aplicamos el teorema de Rouché-Fröbenius obtenemos los siguientes casos:

1er Caso: si rang M = rang $\hat{M}$ = 2, las dos ecuaciones son las ecuaciones implícitas de la recta. La intersección de los planos es una recta.

2º Caso: si rang M = 1 y rang $\hat{M}$ = 2 el sistema es incompatible, no tiene solución. Los dos planos son paralelos.

3er Caso: si rang M = 1 y rang $\hat{M}$ = 1 el sistema es compatible indeterminado, depende de dos parámetros. Los dos planos coinciden.

RESUMEN

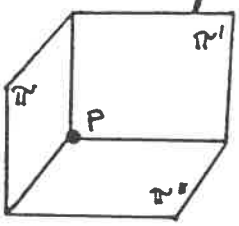
rang M	rang $\hat{M}$	Posición relativa
2	2	Se cortan en una recta
1	2	Son paralelos
1	1	Son coincidentes

VII- POSICIÓN RELATIVA DE TRES PLANOS.

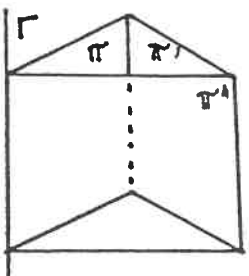
Se consideran los planos: $\pi: Ax+By+Cz+D=0$, $\pi': A'x+B'y+C'z+D=0$ y $\pi'': A''x+B''y+C''z+D''=0$ y sus matrices asociadas

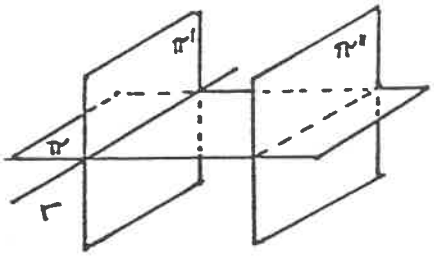
$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \text{ y } \hat{M}=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

1er Caso: rang M = rang $\hat{M}$ = 3. El sistema es compatible determinado y, por tanto, la solución es única. Los tres planos se cortan en un punto P.

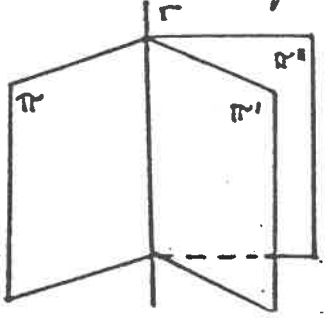


2º Caso: rang M = 2, rang $\hat{M}$ = 3. El sistema es incompatible. No hay solución. Como rang M = 2, dos de los planos se cortan en una recta y el tercero es paralelo a ella.





3er Caso rang M = 2, rang $\hat{M}$ = 2. El sistema es compatible indeterminado. y como rang M = 2, los tres planos se cortan según una recta.



4º Caso: Si rang M = 1 y rang $\hat{M}$ = 2 el sistema es incompatible, no hay solución. Como rang M = 1 los planos son paralelos (dos de ellos pueden ser coincidentes)

5º Caso: Si rang M = 1 y rang $\hat{M}$ = 1 el sistema es compatible indeterminado. Las tres ecuaciones son proporcionales y, por tanto, los tres planos coinciden.

RESUMEN:

rang M	rang $\hat{M}$	Posición relativa.
3	3	Se cortan en un punto
2	3	Dos se cortan en una recta y el 3º es paralelo a ell
2	2	Se cortan en una recta
1	2	Son paralelos
1	1	Son coincidentes

Cuando haya dos posibilidades, si se quiere distinguir cuál de ellas es la cierta, se estudian los planos de dos en dos.

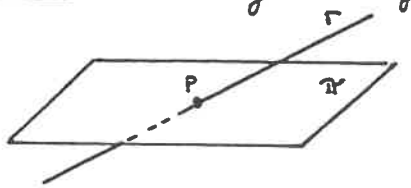
VIII.- POSICIÓN RELATIVA DE RECTA Y PLANO.

Sean $\left.\begin{matrix} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{matrix}\right\}$ con rang $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2$ las ecuaciones implícitas de una recta r y $A''x+B''y+C''z+D''=0$ la ecuación del plano π.

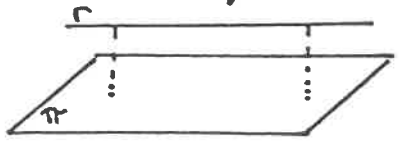
Se consideran las matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

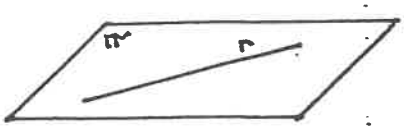
1er Caso: Si rang M = rang $\hat{M}$ = 3 el sistema es compatible determinado. Existe una única solución. La recta y el plano se cortan en un punto P.



2º Caso: Si rang M = 2 y rang $\hat{M}$ = 3 el sistema es incompatible. No tiene solución. La recta y el plano son paralelos.



3er Caso: Si rang M = rang $\hat{M}$ = 2 el sistema es compatible indeterminado. La recta r está contenida en el plano π.



RESUMEN

rang M	rang $\hat{M}$	Posición relativa
3	3	Se cortan en un punto
2	3	son paralelas
2	2	r está contenida en π

IX: POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS.

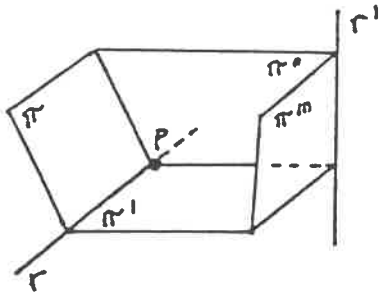
Sean las rectas r y r'

$$r \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \quad \text{rang}\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} = 2 \; ; \; r' \begin{cases} A''x+B''y+C''z+D''=0 \\ A'''x+B'''y+C'''z+D'''=0 \end{cases} \quad \text{rang}\begin{pmatrix} A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} = 2$$

Se consideran las matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \\ A''' & B''' & C''' \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \\ A''' & B''' & C''' & D''' \end{pmatrix}$$

1er Caso: Si rang $M = 3$ y rang $\hat{M} = 4$. El sistema es incompatible.



No tienen ningún punto común pero no son paralelas, ya que como rang $M = 3$ tres de los planos se cortan en un punto P y el cuarto no pasa por él.
Las rectas se cruzan.

2ºCaso: Si rang $M = 3$ y rang $\hat{M} = 3$ el sistema es compatible determinado. Las dos rectas se cortan en un punto.

3erCaso: Si rang $M = 2$ y rang $\hat{M} = 3$, el sistema es incompatible. Las rectas son paralelas.

4ºCaso: Si rang $M = 2$ y rang $\hat{M} = 2$, el sistema es compatible indeterminado. Las dos rectas coinciden.

RESUMEN

rang M	rang $\hat{M}$	Posición relativa
3	4	Se cruzan
3	3	Se cortan en un punto
2	3	Son paralelas
2	2	coinciden

I.- DEFINICIÓN Y PRIMERAS PROPIEDADES.

① Definición.- Un espacio vectorial real es una terna $(V, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ donde:

* V es un conjunto no vacío.
* La operación $+$ es una operación binaria interna definida sobre V y tal que $(V,+)$ es grupo conmutativo
* La operación $\cdot_{\mathbb{R}}$ es una operación binaria externa definida sobre V, con dominio de operadores en $\mathbb{R}$ y que verifica las siguientes propiedades:

i) $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{a}, \vec{b} \in V$

ii) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{a} \in V$

iii) $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a})$ $\quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{a} \in V$

iv) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ $\quad \forall \vec{a} \in V$

Hay que hacer notar que son cuatro las operaciones que entran en juego en la definición: la suma y el producto de números reales y las dos operaciones definidas sobre V.
Para facilitar la notación, la suma de números reales y la suma definida en V se denotan de la misma manera y lo mismo sucede con el producto.
Por comodidad, también escribiremos $\alpha \vec{a}$ en vez de $\alpha \cdot \vec{a}$.

DEF.- Los elementos del conjunto V se llaman vectores y los elementos de $\mathbb{R}$ se llaman escalares.

Ejemplos.- Los vectores libres del plano.

1) Los polinomios de grado menor o igual que n (incluido el polinomio nulo, que no tiene grado).
2) $\mathbb{R}$; $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$; ..... ; $\mathbb{R}^n$; $\mathbb{C}$ (números complejos).
3) Las funciones reales de variable real.
4) Las sucesiones de números reales.

En todos ellos la operación interna es la suma y la externa el producto por números reales.

② Consecuencias de la definición.

[a] Cualesquiera que sean $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\vec{a} \in V$ se verifica:

$$(\alpha = 0 \text{ o } \vec{a} = \vec{0}) \iff \alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

D/ $\Rightarrow$) · Si $\alpha = 0$, tenemos que probar $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

$\forall \beta \in \mathbb{R}$ se verifica: $\beta \vec{a} = (\beta + 0) \cdot \vec{a} = \beta \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{a} \Rightarrow 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

· Si $\vec{a} = \vec{0}$, tenemos que probar $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$\forall \vec{b} \in V$ se verifica: $\alpha \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{0} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{0} + \alpha \cdot \vec{b} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

$\Leftarrow$) Si $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$ pueden darse dos casos:

- si $\alpha = 0$, el teorema está demostrado.
- si $\alpha \neq 0$ $\quad \alpha \cdot \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot (\alpha \cdot \vec{a}) = \frac{1}{\alpha} \cdot \vec{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha\right) \cdot \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow 1 \cdot \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

Como ejercicio, justificar todos los pasos.

[b] $(-\alpha) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (-\vec{a}) = -(\alpha \cdot \vec{a}) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \vec{a} \in V$

D/ $\left.\begin{array}{l} \vec{0} = 0 \cdot \vec{a} = [\alpha + (-\alpha)]\,\vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + (-\alpha) \cdot \vec{a} \Rightarrow (-\alpha) \cdot \vec{a} = -(\alpha \cdot \vec{a}) \\ \vec{0} = \alpha \cdot \vec{0} = \alpha \cdot [\vec{a} + (-\vec{a})] = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot (-\vec{a}) \Rightarrow \alpha \cdot (-\vec{a}) = -(\alpha \cdot \vec{a}) \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-\alpha) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (-\vec{a}) = -(\alpha \cdot \vec{a})$$

[c] $\left.\begin{array}{l} (\alpha - \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} - \beta \vec{a} \\ \alpha (\vec{a} - \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} - \alpha \cdot \vec{b} \end{array}\right\} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in V$

D/ Ejercicio

[d] $\alpha \cdot \vec{a} = \beta \cdot \vec{a} \Rightarrow \alpha = \beta \qquad \forall \vec{a} \in V, \vec{a} \neq \vec{0}, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

D/ Ejercicio

II.- SUBESPACIOS VECTORIALES. CLAUSURA LINEAL.

① Subespacios vectoriales.

[a] DEF.- Sea V un espacio vectorial real y sea S un subconjunto no vacío de V. Se dice que S es subespacio vectorial de V, si con las operaciones $+$ y $\cdot_{\mathbb{R}}$ definidas sobre V, $(S, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ es espacio vectorial real.

* A los subespacios $S = \{\vec{0}\}$, $S = V$ se les llama subespacios impropios, al resto se les llama subespacios propios.

Ejemplo.- $S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}})$

- Las funciones continuas en un punto son un subespacio de las funciones reales de variable real.
- Las sucesiones convergentes son un subespacio de las sucesiones de números reales.

b Teorema de caracterización de subespacios vectoriales.

Sea $(V, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ un espacio vectorial real y sea S un subconjunto no vacío de V.

S es subespacio vectorial de $V \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \ \forall \vec{a}, \vec{b} \in S \text{ se cumple : } \vec{a} + \vec{b} \in S \\ 2) \ \forall \vec{a} \in S \text{ y } \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ se cumple : } \alpha \cdot \vec{a} \in S \end{cases}$

D/ $\Rightarrow$) Si S es subespacio vectorial de V, por la definición de subespacio, $(S, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ es espacio vectorial real.

En particular : 1) $+$ es operación binaria interna en S, luego $\forall \vec{a}, \vec{b} \in S$ se cumple $\vec{a} + \vec{b} \in S$.

2) $\cdot_{\mathbb{R}}$ es operación binaria externa definida sobre S, luego $\forall \vec{a} \in S$ y $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ se cumple $\alpha \cdot \vec{a} \in S$.

$\Leftarrow$) Vamos a comprobar que $(S, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ es espacio vectorial real, para lo cual demostraremos que cumple todas las propiedades de la definición de espacio vectorial.

* $S \neq \emptyset$, por hipótesis.
* $(S, +)$ es grupo conmutativo.
  - La operación binaria $+$ es interna en S, puesto que $\vec{a} + \vec{b} \in S$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in S$
  - Es conmutativa y asociativa en S, porque ya lo era en V, luego también lo será en un subconjunto suyo.
  - Elemento neutro : si $\alpha = 0$ entonces $0 \cdot \vec{a} = \vec{0} \in S$, por 2)
  - " simétrico : si $\alpha = -1$ " $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a} \in S$, por 2)
* $\cdot_{\mathbb{R}}$ es una operación binaria externa definida sobre S.
* Las otras 4 propiedades se verificaban en V, luego también se verificarán, en particular, para los elementos de S.

En consecuencia, S es subespacio vectorial de V.

TEOR.- Sea $(V, +, \cdot_{\mathbb{R}})$ un espacio vectorial real y S un subconjunto no vacío de V.

S es subespacio vectorial de $V \Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \vec{a}, \vec{b} \in S$ se cumple: $\alpha \cdot \vec{a} + \beta \vec{b} \in S$

D/ $\Rightarrow$) $\left.\begin{array}{l} \text{Si } \vec{a} \in S \overset{2)}{\Rightarrow} \alpha \cdot \vec{a} \in S \\ \text{Si } \vec{b} \in S \overset{2)}{\Rightarrow} \beta \cdot \vec{b} \in S \end{array}\right\} \overset{1)}{\Rightarrow} \alpha \cdot \vec{a} + \beta \vec{b} \in S$

$\Leftarrow$) Si $\alpha = \beta = 1 \Rightarrow 1 \cdot \vec{a} + 1 \cdot \vec{b} = \vec{a} + \vec{b} \in S$, luego se verifica 1)

Si $\beta = 0 \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} + \vec{0} = \alpha \cdot \vec{a} \in S$, luego se verifica 2)

Ejemplo.- $S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot_{\mathbb{R}})$

1) Si $\vec{a}\,(x, 0)$, $\vec{b}\,(y, 0) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b}\,(x+y, 0) \in S$, ya que $x+y \in \mathbb{R}$

2) Si $\vec{a}\,(x, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot \vec{a}\,(\alpha x, 0) \in S$, ya que $\alpha x \in \mathbb{R}$

② Clausura lineal.

[a] DEF.- Si $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in V$, espacio vectorial real, se dice $\vec{x} \in V$ es combinación lineal de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n$$

Si todos los coeficientes son 0, la combinación lineal se llama trivial.

DEF.- Si $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in V$, espacio vectorial real. Se llama clausura lineal de $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$, y se denota por $\mathbb{R}[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$, al conjunto formado por todas las combinaciones lineales de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Es decir:

$$\mathbb{R}[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n] = \left\{ \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n \;\middle|\; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

[b] TEOR.- La clausura lineal de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ es un subespacio vectorial de $(V, +, \cdot_{\mathbb{R}})$.

D/ Si $\vec{a} \in \mathbb{R}[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] \Rightarrow \vec{a} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n$
Si $\vec{b} \in \mathbb{R}[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] \Rightarrow \vec{b} = \beta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \beta_n \vec{a}_n$

1) $\vec{a} + \vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n + \beta_1 \vec{a}_1 + \cdots + \beta_n \vec{a}_n =$
$= (\alpha_1 + \beta_1) \vec{a}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \vec{a}_n \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \in \mathbb{R}[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$

2) $\alpha \cdot \vec{a} = \alpha \cdot (\alpha_1 \vec{a}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{a}_n) = (\alpha \alpha_1) \vec{a}_1 + \cdots + (\alpha \alpha_n) \cdot \vec{a}_n \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha \cdot \vec{a} \in \mathbb{R}[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$

[c] TEOR.- Si $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n \in V$ y $\vec{v}$ es una combinación lineal, no trivial, de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, entonces, existe $\vec{a}_i \in \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\}$ tal que:

$$\mathbb{R}[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_i, \ldots, \vec{a}_n] = \mathbb{R}[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{v}, \ldots, \vec{a}_n],$$

[d] TEOR.- Si $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b} \in V$, entonces, son equivalentes:

1º) $\vec{b}$ es combinación lineal de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$

2º) $\mathbb{R}[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] = \mathbb{R}[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n, \vec{b}]$

[e] DEF.- Un conjunto de vectores $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ de un espacio vectorial real, V, se dice que es un sistema generador de V si todo elemento de V es combinación lineal de ellos. Es decir,

$$V = \mathbb{R}[\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n]$$

También se dice que $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n$ engendran V.
En este caso el espacio vectorial V se dice que es de tipo finito

III.- DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

① Definiciones.

[a] Un conjunto de vectores $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ de un espacio vectorial real, V, se dice ligado y sus vectores linealmente dependientes, si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0}$$

Ej.- En $\mathbb{R}^3$ los vectores $(3,1,2)$, $(0,-2,-2)$, $(2,2,0)$ y $(-1,5,6)$ son linealmente dependientes, ya que:

$$2\cdot(3,1,2) + 2\cdot(0,2,-2) - 3\cdot(2,2,0) + 0\cdot(-1,5,6) = (0,0,0)$$

[b] Un conjunto de vectores $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ de un espacio vectorial real, V, se dice libre y sus vectores linealmente independientes, si cualquier relación del tipo $\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \bar{a}_n = \bar{0}$ implica $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

Ej.- En $\mathbb{R}^3$ los vectores $(0,1,0)$ y $(1,0,1)$ son linealmente independientes, ya que:

$$\lambda(0,1,0) + \mu(1,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow (\mu, \lambda, \mu) = (0,0,0) \Rightarrow \lambda = \mu = 0$$

② Consecuencias.

[a] $\{\bar{0}\}$ es un sistema ligado.

D/ $\alpha \cdot \bar{0} = \bar{0}$ con $\alpha \neq 0$

[b] Si $\bar{a} \in V$, $\bar{a} \neq \bar{0}$ entonces $\{\bar{a}\}$ es sistema libre.

D/ $\alpha \cdot \bar{a} = \bar{0} \Rightarrow \alpha = 0$ (por las propiedades de espacio vectorial)

[c] Sean S y S' dos subconjuntos de V tales que $S \subset S'$, entonces:

1) S es un sistema ligado $\Rightarrow$ S' es un sistema ligado.

2) S' es un sistema libre $\Rightarrow$ S es un sistema libre.

D/ 1) Sean $S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m\}$ y $S' = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_m, \bar{a}_{m+1}, \ldots, \bar{a}_n\}$

Por ser S sistema ligado: $\exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$, no todos nulos, tales que $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_m \cdot \bar{a}_m = \bar{0}$.

Entonces: $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_m \cdot \bar{a}_m + 0 \cdot \bar{a}_{m+1} + \cdots + 0 \cdot \bar{a}_n = \bar{0}$,

y como no todos los coeficientes son nulos, el sistema S' es ligado.

2) En efecto, S debe ser libre, puesto que si S fuese ligado por el apartado 1), S' sería ligado, en contra de la hipótesis.

② Dimensión de un espacio vectorial.

[a] DEF.- Se llama dimensión de un espacio vectorial real V, de tipo finito, y se designa por dim V, al número de vectores de una cualquiera de sus bases.

[b] TEOR.- En un espacio vectorial real de dimensión n, todo sistema libre que contenga n vectores es base.

③ Coordenadas de un vector.

[a] DEF.- Sea V un espacio vectorial real de dimensión n y $B = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ una base de V. Se llaman coordenadas de un vector $\bar{x}$, a la n-tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, tal que:

$$\bar{x} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \cdots + \alpha_n \cdot \bar{a}_n$$

[b] Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas.

D/ Sea $B = \{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\}$ una base de V y $\bar{x} \in V$.

Por ser B sistema generador : $\bar{x} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{a}_n$.

Supongamos que $\bar{x}$ también se puede expresar de otra forma:

$\bar{x} = \beta_1 \bar{a}_1 + \cdots + \beta_n \bar{a}_n$. Igualando ambas, obtenemos:

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \cdots + \alpha_n \bar{a}_n = \beta_1 \bar{a}_1 + \cdots + \beta_n \bar{a}_n \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \bar{a}_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \bar{a}_n = \bar{0}$$

Por ser B sistema libre : $\alpha_1 - \beta_1 = 0, \ldots, \alpha_n - \beta_n = 0$, de donde:

$\alpha_1 = \beta_1, \ldots, \alpha_n = \beta_n$, luego las coordenadas son únicas en B.

V.- RANGO DE UN CONJUNTO DE VECTORES.

① DEF.- Sea V un espacio vectorial real y $S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_r\}$ un subconjunto de vectores de V. Se llama rango del conjunto S, y lo representaremos por rg(S), a la dimensión del subespacio engendrado por S: $\mathbb{R}[S]$. $rg(S) = \dim \mathbb{R}[S]$, es decir, la dimensión de la clausura lineal de los vectores de S.

- El rango de un conjunto de vectores coincide con el máximo número de vectores linealmente independientes de S.

② Reglas para el cálculo del rango de un conjunto de vectores.

Consideremos el conjunto S', obtenido de S al aplicar una o varias de las siguientes transformaciones (llamadas de Gauss):

a) Cambiar el orden de los vectores de S.

b) Multiplicar un vector de S por un número real distinto de 0.

c) Suprimir un vector de S que sea combinación lineal de los demás

d) Sustituir un vector de S por una combinación lineal de él y los demás, siempre que el coeficiente del vector sustituido sea distinto de cero.

Entonces: $\mathbb{R}[S] = \mathbb{R}[S']$ y por tanto $rg(S) = rg(S')$

- Luego, para calcular el rango de un sistema de vectores, podremos aplicar cualquiera de las 4 transformaciones anteriores, extrayendo de S un conjunto S', de vectores linealmente independientes y que tiene el mismo rango que S.

- Ejemplos. Calcular el rango de $S = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4\}$

$\bar{a}_1 = (2, -1, 0, 1)$; $\bar{a}_2 = (1, 1, 2, 0)$; $\bar{a}_3 = (5, -1, 2, 2)$; $\bar{a}_4 = (3, 0, 2, 1)$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \qquad rg(S) = 2$$

- $\bar{a}_1 = (1, 1, 2, 1)$; $\bar{a}_2 = (3, 0, 2, 3)$; $\bar{a}_3 = (7, 4, -2, -1)$; $\bar{a}_4 = (5, 2, 4, 7)$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 4 & 7 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & -16 & -8 \\ 0 & -3 & -6 & 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{matrix}$$

Luego el rango es 4.

* Basándonos en este párrafo y en el apartado ③ [b] del anterior, podemos resolver los problemas de bases con el método de las transformaciones de Gauss ("haciendo ceros").

I.- LÍMITE DE UNA SUCESIÓN.

① DEF.- Se dice que el número real "a" es el <u>límite de la sucesión</u> (a_n), y se escribe $\lim(a_n)=a$, si cualquiera que sea el entorno de centro "a" que dibujemos, existe un término de la sucesión tal que él y todos los que le siguen están dentro de dicho entorno.

* Considérese que:
  - Dibujar un entorno de centro "a" es tomar un número real positivo cualquiera, ε, como radio del entorno y dibujarlo.
  - Decir que existe un término de la sucesión es lo mismo que señalar cuál es: a_{n_0}; él y todos los que le siguen: $a_{n_0}, a_{n_0+1}, \ldots\ldots$, están dentro del entorno de centro a y radio ε, es decir que:

$$a-\varepsilon < a_{n_0} < a+\varepsilon \quad \text{o lo que es lo mismo} \quad |a_{n_0}-a|<\varepsilon$$
$$a-\varepsilon < a_{n_0+1} < a+\varepsilon \qquad\qquad |a_{n_0+1}-a|<\varepsilon$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Se puede escribir la definición de la siguiente forma:

DEF.- $\lim(a_n)=a$ si, cualquiera que sea $\varepsilon>0$, existe un término de la sucesión, el a_{n_0}, tal que él y todos los siguientes están en el entorno $E_\varepsilon(a)$, es decir: $|a_{n_0}-a|<\varepsilon$, $|a_{n_0+1}-a|<\varepsilon$, ...

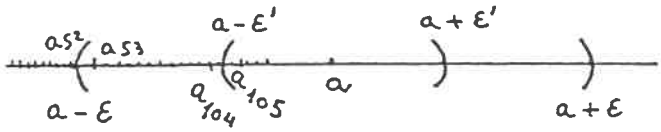
DEF.-

$$\lim(a_n)=a \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists n_0(\varepsilon)\in \mathbb{N}^* / \left\{ \begin{array}{l} a_n \in E_\varepsilon(a) \\ |a_n-a|<\varepsilon \\ d(a_n,a)<\varepsilon \\ a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon \end{array} \right\} \ \forall n \geq n_0$$

* Observaciones:

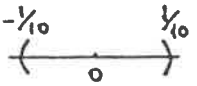
1) El número n_0 dependerá de ε, de tal manera que cuanto más pequeño es ε mayor es el número natural n_0.

Ej.-



2) Los primeros términos, hasta a_{n_0}, no juegan ningún papel, pudiendo tomar valores cualesquiera.

* Ejemplo: $\lim\left(\frac{1}{n}\right)=0$

- Si $\varepsilon=\frac{1}{10}$  ¿Qué términos estarán dentro del entorno dibujado?

$$a_n \in E_{1/10}(0) \iff |a_n-0|<\frac{1}{10} \iff \left|\frac{1}{n}\right|<\frac{1}{10} \iff \frac{1}{n}<\frac{1}{10} \iff \underline{n>10}$$

esto quiere decir que los términos $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\ldots \in E_{\frac{1}{10}}(0)$

- si $\varepsilon=\frac{1}{1000}$, repitiendo el proceso, <u>$n>1000$</u>:

$$a_{1001}, a_{1002}, a_{1003}, \ldots\ldots \in E_{\frac{1}{1000}}(0)$$

② Propiedades.

a) Unicidad del límite: "Si una sucesión tiene límite, éste es único".

b) Toda sucesión convergente está acotada.

c) Toda sucesión creciente (decreciente) acotada superiormente (inferiormente) es convergente.

d) Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones tales que:

- $a_n < b_n$
- $\lim(a_n) = a$ y $\lim(b_n) = b$

$\Big\} \Rightarrow a \leq b$

e) Si (a_n) y (b_n) son dos sucesiones convergentes:

- $\lim(a_n \pm b_n) = \lim(a_n) \pm \lim(b_n)$
- $\lim(a_n \cdot b_n) = \lim(a_n) \cdot \lim(b_n)$
- $\lim(a_n)^{(b_n)} = [\lim(a_n)]^{\lim(b_n)}$

Demostraremos una de ellas, por ejemplo:

TEOR. Si $\lim(a_n) = a$ y $\lim(b_n) = b$, entonces $\lim(a_n + b_n) = a + b$.

D/ Tendremos que demostrar que:

$$\lim(a_n + b_n) = a + b \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* \ni |(a_n + b_n) - (a+b)| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0.$$

es decir, que para cualquier entorno de centro $a+b$ y radio ε, existe un término de la sucesión $(a_n + b_n)$ tal que él y todos los que le siguen están dentro de dicho entorno.

Por hipótesis:

$$\lim(a_n) = a \iff \forall \tfrac{\varepsilon}{2} > 0,\ \exists n_1\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}^* \ni |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq n_1 \quad (1)$$

$$\lim(b_n) = b \iff \forall \tfrac{\varepsilon}{2} > 0,\ \exists n_2\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}^* \ni |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq n_2 \quad (2)$$

Si tomamos $n_0 = \text{máximo}\{n_1, n_2\}$, las dos desigualdades (1) y (2) se verificarán simultáneamente, $\forall n \geq n_0$; luego:

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq n_0$$

En consecuencia:

$$|(a_n + b_n) - (a+b)| = |a_n + b_n - a - b| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq$$

$$\leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\ \forall n \geq n_0.$$

(≤ desigualdad triangular)

Por tanto, $|(a_n + b_n) - (a+b)| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$, si $n_0 = \text{máximo}\{n_1, n_2\}$

II.- LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.

① DEF.- Sea f una función real definida en un subconjunto D de $\mathbb{R}$, se dice que $\lim_{x\to a} f(x)=l$ si y sólo si:

i) Definición topológica: cualquiera que sea E, entorno de l, existe F^*, entorno reducido de a, tal que si $x\in F^*$, entonces $f(x)\in E$.

ii) Definición métrica:

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta(\varepsilon)>0 \ / \ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

DEF.- La función $f(x)$ se dice que es convergente hacia l en a si $\lim_{x\to a} f(x)=l$.

Límites laterales

Si sólo nos interesa saber el comportamiento de la función cuando x se acerca a "a" por la izquierda o por la derecha, definiremos:

DEF.- Límite lateral izquierdo de f en el punto a:

$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\uparrow a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l \iff$ cualquiera que sea E, entorno de l, existe F^*, entorno reducido de a, tal que si $x\in F^*$ y $x<a$, entonces $f(x)\in E$.

$$\iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0 \ / \ 0<a-x<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

DEF.- Límite lateral derecho de f en el punto a:

$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = l \iff$

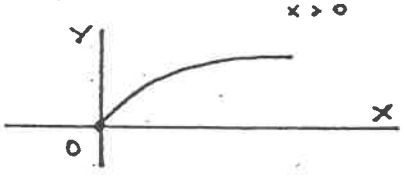
$\iff$ cualquiera que sea E, entorno de l, existe F^*, entorno reducido de a, tal que si $x\in F^*$ y $x>a$, entonces $f(x)\in E$.

$$\iff \forall \varepsilon>0, \exists \delta(\varepsilon)>0 \ / \ 0<x-a<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

PROP.- Si existen los límites laterales y son iguales, entonces existe límite y se verifica: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$

Nota.- Si la función sólo existe a la izquierda (o a la derecha) de a y tiene límite lateral izquierdo (derecho) en a, diremos que existe el límite de la función f en a.

Ej.- $f(x)=\sqrt{x}$ $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=0$, diremos también que $\lim_{x\to 0} f(x)=0$



② Propiedades.

a) Unicidad del límite : "El límite de una función en un punto, si existe, es único."

b) Regla del sandwich : Si f, g, h son tres funciones tales que:

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ en un entorno de a
- $\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$

$\Rightarrow \lim_{x\to a} g(x) = l$

c) Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y g es una función acotada, entonces $\lim_{x\to a} (f\cdot g)(x) = 0$

d) Conservación del signo en un entorno por una función con límite no nulo : "Si $\lim_{x\to a} f(x) = l \neq 0$, existe un entorno reducido de a, tal que todos sus puntos verifican : signo $f(x)$ = signo l"

D/ En efecto, supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = l \neq 0$, entonces o $l>0$ o $l<0$.

i) Si $l>0$, consideremos un entorno E de l tal que todos sus puntos sean positivos (bastaría coger como radio del entorno un ε mayor que 0 y menor que l).

Como $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y E es un entorno de l, existirá un entorno reducido de a: F^*, tal que todos sus puntos verifican $f(x) \in E$, de donde $f(x)>0$ y por tanto signo $f(x)$ = signo l.

ii) Si $l<0$, consideremos un entorno E de l tal que todos sus puntos sean negativos (bastaría coger como radio del entorno un ε mayor que 0 y menor que $-l$).

Como $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y E es un entorno de l, existirá un entorno reducido de a: F^*, tal que todos sus puntos verifican $f(x) \in E$, de donde $f(x)<0$ y por tanto signo $f(x)$ = signo l. //

e) Las operaciones con límites de funciones son totalmente análogas a las ya vistas con límites de sucesiones.

③ Relación entre el límite de sucesiones y el de funciones.

TEOR.- Son equivalentes las siguientes afirmaciones:

i) $\lim_{x\to a} f(x) = b$

ii) Cualquiera que sea la sucesión (a_n) que tiende a "a", pero cuyos términos son todos distintos de "a", verifica la propiedad de que la sucesión imagen $(f(a_n))$ tiende a "b".

OPERACIONES CON LÍMITES EN $\overline{\mathbb{R}}$

LÍMITE DE LA SUMA $f(x)+g(x)$

$\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$		LÍMITES		
		M	$+\infty$	$-\infty$
LÍMITES	L	$L+M$	$+\infty$	$-\infty$
	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
	$-\infty$	$-\infty$		$-\infty$

LÍMITE DE LA DIFERENCIA $f(x)-g(x)$

$\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$		LÍMITES		
		M	$+\infty$	$-\infty$
LÍMITES	L	$L-M$	$-\infty$	$+\infty$
	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	

LÍMITE DEL PRODUCTO $f(x)\cdot g(x)$

$\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$		LÍMITES			
		$M\neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
LÍMITES	$L\neq 0$	$L\cdot M$	0	$+\infty$ si $L>0$ $-\infty$ si $L<0$	$-\infty$ si $L>0$ $+\infty$ si $L<0$
	0	0	0		
	$+\infty$	$+\infty$ si $M>0$ $-\infty$ si $M<0$		$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$-\infty$ si $M>0$ $+\infty$ si $M<0$		$-\infty$	$+\infty$

LÍMITE DEL COCIENTE $f(x)/g(x)$

$\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$		LÍMITES			
		$M\neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
LÍMITES	$L\neq 0$	L/M		0	0
	0	0		0	0
	$+\infty$	$+\infty$ si $M>0$ $-\infty$ si $M<0$			
	$-\infty$	$-\infty$ si $M>0$ $+\infty$ si $M<0$			

LÍMITE DE $K\cdot f(x)$ $(K\in\mathbb{R})$

$\lim f(x)$ \ K		LÍMITES		
		L	$+\infty$	$-\infty$
LÍMITES	$K>0$	$K\cdot L$	$+\infty$	$-\infty$
	0	0	0	0
	$K<0$	$K\cdot L$	$-\infty$	$+\infty$

LÍMITE DE $f(x)^{g(x)}$ $(f(x)>0\ \forall x\in D)$

$\lim f(x)$ \ $\lim g(x)$		LÍMITES			
		$M\neq 0$	0	$+\infty$	$-\infty$
LÍMITES	0	0 si $M>0$ $+\infty$ si $M<0$	COU	0	$+\infty$
	$0<L<1$	L^M	1	0	$+\infty$
	1	1	1		
	$L>1$	L^M	1	$+\infty$	0
	$+\infty$	$+\infty$ si $M>0$ 0 si $M<0$	COU	$+\infty$	0

El cálculo de límites se reduce a aplicar sistemáticamente los teoremas recogidos en la tabla de operaciones con límites. Sólo en el caso en que aparezca una indeterminación habrá que operar de alguna manera para hacerla desaparecer.

Las indeterminaciones se reducen a 9 tipos distintos:

$$\infty-\infty \;;\; 0\cdot\infty \;;\; \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{0},\ \frac{L\neq 0}{0},\ \frac{\infty}{\infty} \;;\; 0^0,\ (+\infty)^0,\ 1^\infty$$

* Nota: Si $x\to-\infty$ conviene realizar el cambio $x=-t$, con lo que $t\to+\infty$

① Límites de la función constante: $\lim_{x\to a} k = k$; $\lim_{x\to+\infty} k = k$

② Límites de la función identidad: $\lim_{x\to a} x = a$; $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

③ Límites de funciones potenciales con exponente entero:

[a] Si $n\in\mathbb{N}^*$ $\lim_{x\to a} x^n = a^n$; $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$

[b] Si $n\in\mathbb{N}^*$ $\lim_{x\to a}\frac{1}{x^n}=\frac{1}{a^n}\ (a\neq 0)$; $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$

· Si n es par: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n}=+\infty$ · Si n es impar: $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1}{x^n}=-\infty$; $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{1}{x^n}=+\infty$

④ Límites de funciones polinómicas: * $\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$

* $\lim_{x\to+\infty} P(x) = \begin{cases}+\infty\\ -\infty\end{cases}$ según que el coeficiente principal sea $\begin{cases}\text{positivo}\\ \text{negativo}\end{cases}$

El método consiste en sacar factor común x elevado al grado del polinomio.

⑤ Límites de funciones racionales:

* $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ i) Si $Q(a)\neq 0$ $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$

ii) Si $Q(a)=0$ y $P(a)\neq 0$, queda una indeterminación del tipo $\frac{L}{0}$, hay que estudiar los límites laterales.

iii) Si $Q(a)=0$ y $P(a)=0$, queda una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, hay que descomponer factorialmente $P(x)$ y $Q(x)$ y simplificar hasta que desaparezca la indeterminación

* $\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a_m x^m+a_{m-1}\cdot x^{m-1}+\cdots+a_1\cdot x+a_0}{b_p\cdot x^p+b_{p-1}\cdot x^{p-1}+\cdots+b_1 x+b_0}=L\quad (a_m, b_p\neq 0)\begin{cases}\text{grado } P(x)=\\ \text{grado } Q(x)=\end{cases}$

i) Si $m<p \Rightarrow L=0$.

ii) Si $m=p \Rightarrow L=\frac{a_m}{b_p}$

iii) Si $m>p \Rightarrow L=\begin{cases}+\infty & \text{si signo } a_m=\text{signo } b_p\\ -\infty & \text{si signo } a_m\neq\text{signo } b_p\end{cases}$

El método consiste en dividir el numerador y el denominador por x^p, es decir, x elevado al grado del denominador.

⑥ Límites de algunas funciones irracionales:

* $\lim_{x \to a} f(x)$, si la indeterminación es del tipo $\frac{0}{0}$, las expresiones (estén en el numerador o en el denominador) que contengan una diferencia, con alguno de los términos una raíz cuadrada ($\sqrt{F} - \sqrt{G}$ o $\sqrt{F} - H$), se multiplican y dividen por la expresión conjugada ($\sqrt{F} + \sqrt{G}$ o $\sqrt{F} + H$). Después se simplifica hasta que desaparezca la indeterminación.

* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, si la indeterminación es del tipo $\infty - \infty$ (esté en el numerador o en el denominador) correspondiente a una expresión $\sqrt{F} - \sqrt{G}$, y los "términos principales" de F y G son iguales, se multiplica y divide por la expresión conjugada.

A continuación se procede de forma similar al método utilizado en el cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales.

Si los "términos principales" de F y G son distintos o las raíces que aparecen en $f(x)$ son de cualquier índice, la indeterminación se elimina utilizando únicamente el método similar al empleado en el cálculo de límites de funciones polinómicas y racionales.

⑦ Límites de algunas funciones exponenciales:

* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, si aparecen varias bases, se saca factor común o se divide el numerador y denominador (según los casos) por la función exponencial que tenga mayor base.

⑧ Otros límites:

Para eliminar indeterminaciones del tipo 1^∞ se utiliza la siguiente fórmula: sea $a \in \mathbb{R}$ o $a = \pm\infty$

si $\lim_{x \to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to a} g(x) = \pm\infty$, entonces: $\lim_{x \to a} \left[f(x)^{g(x)} \right] = e^{\lim_{x \to a} [(f(x)-1) \cdot g(x)}$

① DEF.- Sea f una función real definida en un subconjunto D de $\mathbb{R}$, se dice que f es continua en el punto $x=a$ si y sólo si: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Es decir, f continua en $a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Clasificación de los puntos de discontinuidad.

i) Discontinuidad evitable: si $\lim_{x\to a} f(x)$ es finito y, o bien no coincide con $f(a)$ o bien no existe $f(a)$.

ii) Discontinuidad de 1ª especie:
- Salto finito: si existen límites laterales finitos y distintos.
- Salto infinito: si existen los límites laterales y, al menos, uno de ellos es infinito.

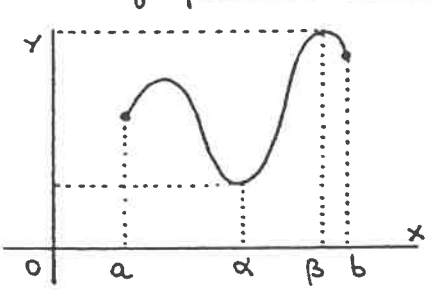
iii) Discontinuidad de 2ª especie: si no existe alguno de los límites laterales

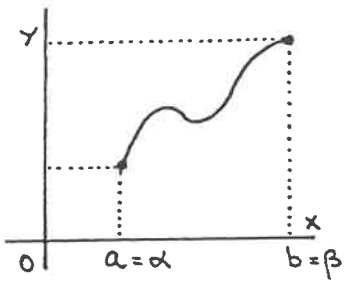
② TEOREMA DE WEIERSTRASS

[a] Enunciado: Toda función real y continua en un intervalo cerrado alcanza en él un máximo y un mínimo absolutos.

Es decir, si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua, existen α y β en $[a,b]$ tales que cualquiera que sea $x\in[a,b]$, $f(\alpha)\le f(x)\le f(\beta)$

[b] Significado geométrico:





Si la función f es continua en el intervalo cerrado, los valores que toma son siempre finitos y por tanto debe haber uno que sea máximo y otro mínimo.

[c] Necesidad de las hipótesis: veamos que no se puede eliminar ninguna.

* La función ha de ser continua en el abierto (a,b), ya que la función de la figura 1 no es continua en (a,b) y no cumple el teorema pues no tiene ni máximo ni mínimo absoluto.

* También ha de ser continua en los extremos, pues la función de la figura 2 tiene mínimo absoluto pero no tiene máximo absoluto.

Luego tiene que ser continua en el intervalo cerrado.

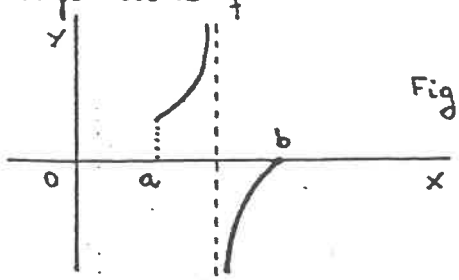


Fig. 1.

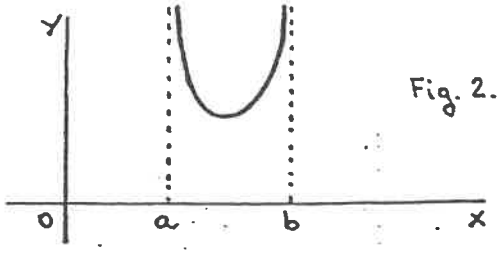


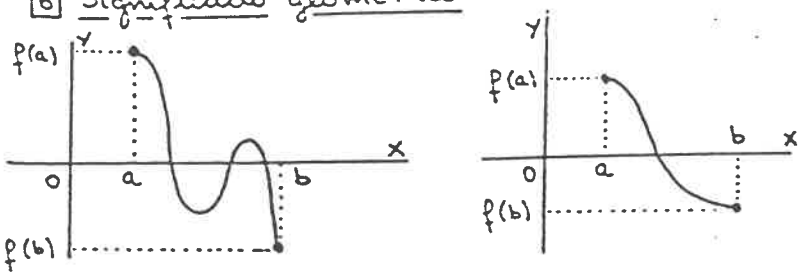
Fig. 2.

③ TEOREMA DE BOLZANO

[a] Enunciado: Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y tiene signos distintos en los extremos de dicho intervalo entonces existe un número c en (a,b) tal que $f(c)=0$.

Es decir, si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua y signo $f(a)\neq$ signo $f(b) \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.

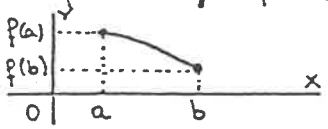
[b] Significado geométrico:



Si la función f es continua y debe cambiar de signo, es necesario que corte al eje de abscisas en el interior del intervalo, al menos, en un punto.

[c] Necesidad de las hipóteris: veamos que no se puede eliminar ninguna.

* Si suponemos que $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua pero signo $f(a)=$ signo $f(b)$, el teorema puede no cumplirse, por ejemplo:



* Si signo $f(a)\neq$ signo $f(b)$ hay que exigir que f sea continua en el interior del intervalo (Figuras 1 y 2) y además debe ser continua en los extremos (Figura 3)

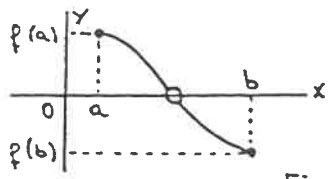


Fig. 1

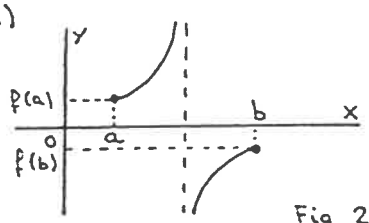


Fig. 2

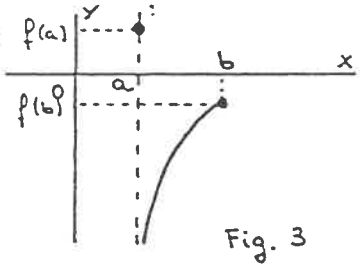
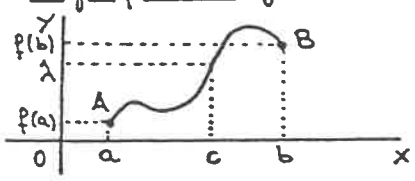


Fig. 3

④ TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS (PROPIEDAD DE DARBOUX)

[a] Enunciado: Si f es continua en $[a,b]$ y $f(a)\neq f(b)$, entonces si λ es un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$, y distinto de ambos, existe c en (a,b) tal que $f(c)=\lambda$.

[b] Significado geométrico:



Si la función debe pasar del punto A al punto B y es continua, es necesario que también pase por un punto cuya ordenada sea λ, entonces la abscisa será el punto c.

[c] Necesidad de las hipóteris: veamos que no se puede eliminar ninguna.

* Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua y $f(a)=f(b)$ no tiene sentido aplicar el teorema ya que no hay ningún λ intermedio entre $f(a)$ y $f(b)$.
* Si $f(a)\neq f(b)$, f debe ser continua en (a,b) (Fig 1) y en los extremos (Fig 2)

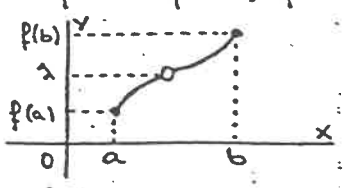


Fig. 1

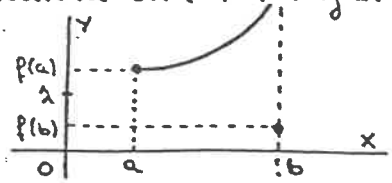


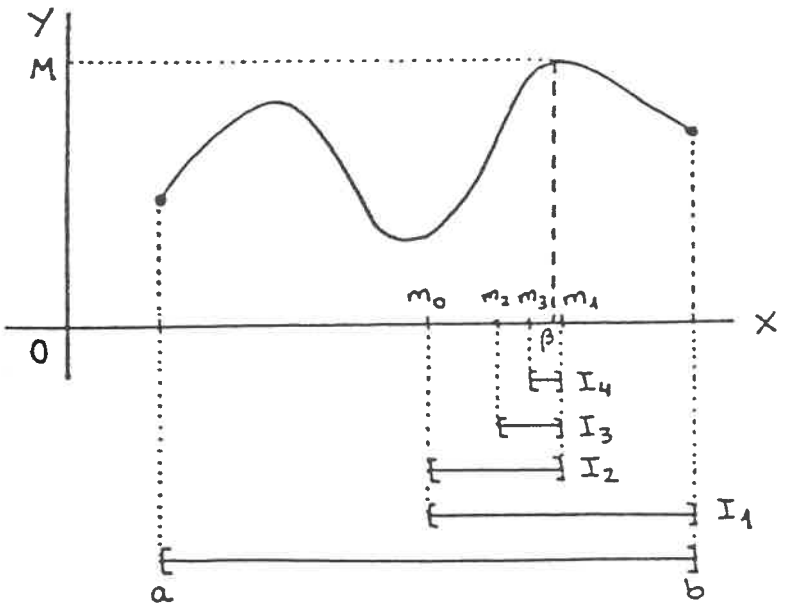
Fig. 2

* TEOREMA DE WEIERSTRASS.

[d] Demostración.

Vamos a demostrarlo con el máximo, análogamente se haría con el mínimo. Es decir, tenemos que probar que:

existe $\beta \in [a,b]$ tal que $f(x) \leq f(\beta) = M \quad \forall x \in [a,b]$.



- Como la función f es continua en $[a,b]$ sus valores forman un conjunto acotado de $\mathbb{R}$; el extremo superior de todos ellos será un número: M, es decir, $f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

  Hay que demostrar que existe un valor β, en $[a,b]$ para el cual $f(\beta) = M$.

- Tomamos el punto medio de $[a,b]$: $m_0 = \frac{a+b}{2}$.

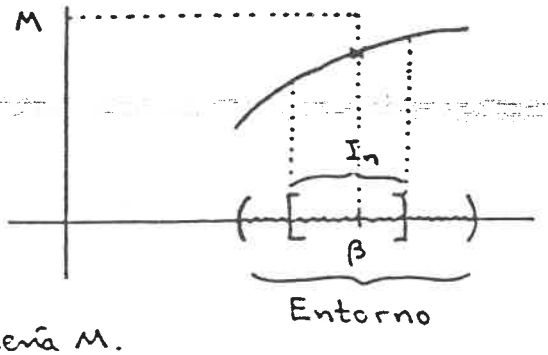
  En uno, al menos, de los dos intervalos: $[a,m_0)$ o $[m_0,b]$ el extremo superior es también M, lo llamamos I_1, su longitud es la mitad de $[a,b]$.

- De nuevo tomamos el punto medio de I_1: m_1 y procedemos de la misma manera, obteniendo otro intervalo I_2, cuya longitud es la mitad del anterior.

- Reiterando este proceso se obtiene una sucesión de intervalos encajados:

$$[a,b] \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \cdots\cdots$$

  cuyas longitudes tienden a 0, la intersección de todos ellos es un punto β. El extremo superior de los valores de f en cada uno de ellos es M.



• Veamos ahora que $f(\beta) = M$.

Si fuera $f(\beta) < M$ (como en la figura), por ser f continua, existiría un entorno de β en el cual $f(x) < M$, pero dentro de ese entorno habría intervalos: I_n, en los que el extremo superior de f no sería M.

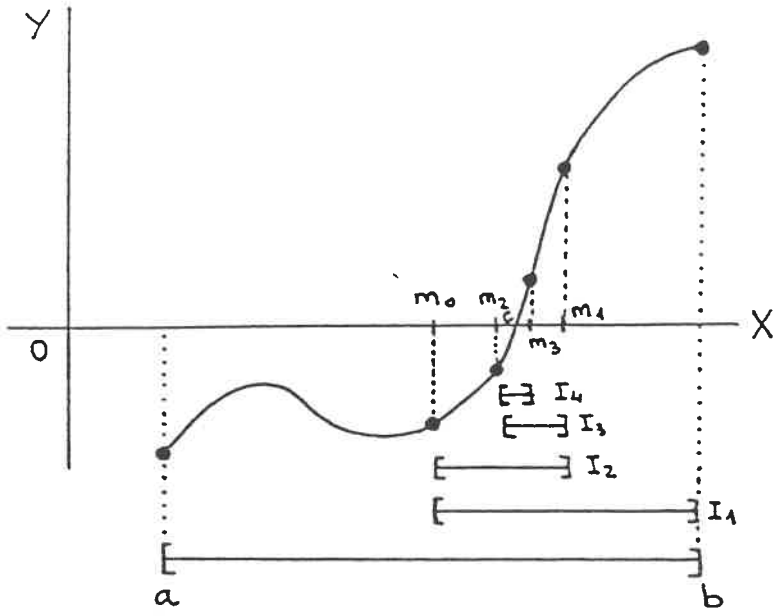
Esto está en contradicción con la construcción de los intervalos, puesto que hemos elegido aquellos en los que el extremo superior de los valores de f es M. Luego $f(\beta) \not< M$.

Como, evidentemente, $f(\beta) \not> M$ (M era el extremo superior), entonces $f(\beta) = M$.

* TEOREMA DE BOLZANO

[d] Demostración.

Vamos a demostrarlo para el caso: $f(a) < 0 < f(b)$, análogamente se haría si $f(a) > 0 > f(b)$.



• Tomamos el punto medio de $[a,b]$: $m_0 = \frac{a+b}{2}$.

Si $f(m_0) = 0$, entonces $c = m_0$ es el punto buscado.

En caso contrario, f tiene signos distintos, o bien en los extremos del intervalo $[a, m_0]$, o bien en los extremos de $[m_0, b]$.

Elegimos, de entre los dos intervalos, aquél en el que f cambia de signo en sus extremos: I_1, cuya longitud es la mitad de $[a,b]$.

- De nuevo tomamos el punto medio de I_1 : m_1 y procedemos de la misma manera, obteniendo otro intervalo I_2, cuya longitud es la mitad del anterior.

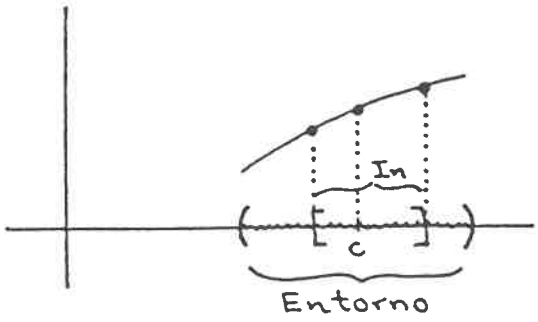
- Reiterando este proceso se obtiene una sucesión de intervalos encajados:

$$[a,b] \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \supset \cdots$$

cuyas longitudes tienden a 0, la intersección de todos ellos es un punto c.

- Veamos ahora que $f(c)=0$.

Si fuera $f(c)>0$ (como en la figura), por ser f continua, existiría un entorno de c en el cual $f(x)>0$, pero dentro de ese entorno habría intervalos: In, en los que la función no cambiaría de signo en sus extremos.



Esto está en contradicción con la construcción de los intervalos, puesto que hemos elegido aquellos en los que la función cambia de signo en sus extremos. Luego $f(c) \neq 0$.

Análogamente se razonaría para $f(c)<0$.

En consecuencia, ha de ser $f(c)=0$.

* TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS (PROPIEDAD DE DARBOUX)

[d] Demostración.

Vamos a demostrarlo para el caso : $f(a)<f(b)$, análogamente se haría si $f(a)>f(b)$.

- Sea λ tal que $f(a) < \lambda < f(b)$, consideremos la función g definida por $g(x) = f(x) - \lambda$.

- Veamos que cumple las condiciones del Teorema de Bolzano:
  - g es continua en [a,b] por serlo f.
  - $g(a) = f(a) - \lambda < 0$
  - $g(b) = f(b) - \lambda > 0$

- Por tanto, existe $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = 0 = f(c) - \lambda \Rightarrow f(c) = \lambda$

I.- INTEGRAL INDEFINIDA.

① Primitivas de una función.

DEF.- Sean f y F dos funciones definidas en un mismo intervalo. Se dice que la función F es una primitiva de f si $F' = f$.

$$F \text{ es primitiva de } f \iff F' = f.$$

Ej.- $f(x) = 4x^3$, $F(x) = x^4$

$f(x) = -\operatorname{sen} x$, $F(x) = \cos x$ o $F(x) = 5 + \cos x$

Se observa que una misma función puede tener varias primitivas.

* Si F es una primitiva de f y C un número real cualquiera, la función $F + C$ es también una primitiva de f, ya que:

$$(F + C)' = F' + 0 = f.$$

Luego, si F es una primitiva de f, el conjunto $\{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ es un conjunto de infinitas primitivas de f.

* Además, se puede demostrar que, ese conjunto es el de todas las primitivas de f.

* Por consiguiente, si F es <u>una</u> primitiva de f, $\{F + C \mid C \in \mathbb{R}\}$ es el conjunto de <u>todas</u> las primitivas de f.
(Al número real C se le llama constante de integración).

② DEF.- Se llama integral indefinida de f, al conjunto de sus primitivas.

Se designa por $\int f$ o $\int f(x)\,dx$

El signo $\int$ se lee "integral de ..." y f se llama integrando.

Es decir, si F es una primitiva de f: $\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$

(No se escribe el símbolo $\{\ldots\ldots\}$ de conjunto, aunque se sobreentiende)

Incluso se puede eliminar la constante y quedaría:

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) \iff F'(x) = f(x)}$$

* Al proceso de cálculo de las primitivas de f (basta calcular una), se le llama "integrar f". Si $f' = g$:

$$f \underset{\text{integrar}}{\overset{\text{derivar}}{\rightleftarrows}} g$$

Por tanto, derivar e integrar son operaciones recíprocas, (salvo la constante de integración), es decir: $\int f' = f + C$

③ Linealidad de la integral indefinida. (Propiedades).

TEOR.- Si f y g son continuas en un intervalo, entonces se verifica: a) $\int (f+g) = \int f + \int g$

b) $\int (kf) = k \int f \quad (k \in \mathbb{R})$

D/ a) Supongamos que $\int f = F$ y $\int g = G$; entonces $F' = f$ y $G' = g$.

Por tanto, $(F+G)' = F' + G' = f + g$.

Luego: $\int (f+g) = F + G = \int f + \int g$

b) Supongamos que $\int f = F$; entonces $F' = f$.

Por tanto, $(k \cdot F)' = k \cdot F' = k \cdot f$.

Luego: $\int (k \cdot f) = k \cdot F = k \int f$

II.- MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.

① Integrales inmediatas.

② Integración por descomposición.

③ Integración por sustitución o cambio de variable.

④ Integración por partes. $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

⑤ Integración de funciones racionales.

(Método de descomposición en fracciones simples)

Se trata de hallar la integral $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

[a] Si grado $P(x) \geq$ grado $Q(x)$, se divide $P(x)$ entre $Q(x)$:

$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, siendo grado $R(x) <$ grado $Q(x)$.

Luego $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \underbrace{\int C(x) \cdot dx}_{(1)} + \underbrace{\int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx}_{(2)}$

La integral (1) es inmediata, y la (2) se resuelve en el siguiente apartado.

b) Si grado $P(x) <$ grado $Q(x)$:

i) Si las raíces de $Q(x)$ son reales y simples: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se escribe:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \ldots\ldots + \frac{A_n}{x-x_n}, \quad A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$$

es decir, una fracción por cada raíz.

ii) Si las raíces de $Q(x)$ son reales y no todas simples, se hace la descomposición en sumandos de la siguiente manera, para cada una de las raíces:

- si x_i es simple: $\frac{A_1}{x-x_i}$
- si x_i es doble: $\frac{A_1}{x-x_i} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2}$
- si x_i es triple: $\frac{A_1}{x-x_i} + \frac{A_2}{(x-x_i)^2} + \frac{A_3}{(x-x_i)^3}$

y así sucesivamente.

En ambos casos, se determinan los numeradores como se explica en los siguientes ejemplos.

Ej.- $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx$ grado $P(x) <$ grado $Q(x)$; Raíces de $Q(x)$: $0, -2, 1$

$$\frac{2x^2+5x-1}{x(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A(x+2)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x-1)}$$

Como las 2 fracciones son iguales y tienen el mismo denominador, también tendrán igual el numerador.

$$2x^2 + 5x - 1 = A(x+2)(x-1) + Bx(x-1) + Cx(x+2)$$

Para calcular A, B, C se pueden utilizar dos métodos:

1) Dar tres valores a x (por lo general, las raíces de $Q(x)$)

$x = 0$; $-1 = A \cdot 2 \cdot (-1)$; $\boxed{A = \frac{1}{2}}$

$x = -2$; $8 - 10 - 1 = B \cdot (-2) \cdot (-3)$; $-3 = 6 \cdot B$; $\boxed{B = -1/2}$

$x = 1$; $6 = C \cdot 3$; $\boxed{C = 2}$

2) Realizar las operaciones del 2º miembro e identificar los coeficientes.

$$\begin{cases} 2 = A + B + C \\ 5 = 2A - A - B + 2C \\ -1 = -2A \end{cases}$$

$\boxed{A = 1/2}$ $\boxed{B = \frac{-1}{2}}$; $\boxed{C = 2}$

$$\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}\,dx = \int \frac{1/2}{x}\,dx + \int \frac{-1/2}{x+2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x+2) + 2\ln(x-1) + C$$

Eg- $\int \frac{2x^2+6x-4}{x^3+4x^2+4x}\,.\,dx$ grado P(x) < grado Q(x)

Raíces de Q(x) : 0 , -2 doble

$$\frac{2x^2+6x-4}{x^3+4x^2+4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx}{x\cdot(x+2)^2}$$

Como las 2 fracciones son iguales y tienen el mismo denominador, también tendrán igual numerador.

$$2x^2+6x-4 = A(x+2)^2 + Bx(x+2) + Cx$$

Para calcular A, B, C se pueden utilizar dos métodos:

1) $x=0$; $-4 = 4A$; $\boxed{A=-1}$

$x=-2$; $8-12-4 = -2C$; $-8 = -2C$, $\boxed{C=4}$

$x=1$; $4 = -1\cdot 9 + B\cdot 3 + 4$; $9 = 3B$; $\boxed{B=3}$

2) $\begin{cases} 2 = A+B & \boxed{B=3} \\ 6 = 4A+2B+C & \boxed{C=4} \\ -4 = 4A & \boxed{A=-1} \end{cases}$

$$\int \frac{2x^2+6x-4}{x^3+4x^2+4x}\,.\,dx = \int \frac{-1}{x}\,.\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx + \int \frac{4}{(x+2)^2}\,dx =$$

$$= -\ln x + 3\ln(x+2) - \frac{4}{x+2} + C$$

iii) Integración de funciones racionales cuyo denominador contiene raíces complejas simples.

Si queremos integrar una función del tipo $\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$, cuando $ax^2+bx+c=0$ tiene raíces complejas, se procederá según los casos.:

* Ejemplo 1.- Si en el numerador está la derivada del denominador, la integral es inmediata.

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,.\,dx = \ln(x^2+x+1) + C$$

* Ejemplo 2.- Si en el numerador hay una constante :

$$\int \frac{3}{x^2+x+1}\,.\,dx = 3\cdot\int \frac{dx}{x^2+x+1} \overset{(1)}{=} 3\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \overset{(2)}{=} 3\int \frac{\frac{dx}{(\sqrt{3}/2)^2}}{\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1} =$$

$$\overset{(3)}{=} 4\int \frac{dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \overset{(4)}{=} 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} \overset{(5)}{=} 2\sqrt{3}\ \text{arc tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

(1) Se descompone el denominador en suma de [illegible] de forma que uno de ellos sea constante.

(2) Se divide numerador y denominador por el cuadrado que es constante.

(3) Se opera y simplifica.

(4) Se calcula la derivada de la función que está al cuadrado en el denominador y se multiplica y divide por ella.
O bien, se hace un cambio de variable, t = función que está al cuadrado

(5) La integral ya es inmediata.

* Ejemplo 3.- Si el numerador no responde a ninguno de los dos ejemplos anteriores:

$$\int \frac{3x+8}{x^2+x+1}\,dx = M\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + N\int \frac{dx}{x^2+x+1} = (*)$$

Como $3x+8 = M(2x+1)+N \Rightarrow \begin{cases} 3 = 2M \;;\; M = \frac{3}{2} \\ 8 = M+N \;;\; N = \frac{13}{2} \end{cases}$

$$(*) = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx + \frac{13}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{3}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}\cdot 13}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

⑥ Integración de funciones trigonométricas.

Si la función a integrar se puede expresar sólo en función del seno y del coseno, se pueden presentar los siguientes casos: (considerando el exponente 0 como exponente par):

i) Si es un producto o cociente de potencias impares en seno o coseno, se resuelve con un cambio de variable del tipo $\cos x = t$ o $\operatorname{sen} x = t$, respectivamente. Salvo $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^\alpha x \cdot \cos^\beta x}$ donde α y β son impares, que se utiliza (iii).

ii) Si es un producto de potencias pares en seno y coseno, se reducen los exponentes utilizando las fórmulas:

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \;;\; \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \;;\; \operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2}$$

iii) Si es un cociente de potencias pares en seno y coseno, se resuelve con el cambio de variable $\operatorname{tg} x = t$, y en este caso:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \;;\; \operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \;;\; dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

iv) Si no se ajusta a ninguno de los tres tipos anteriores, en general se hace el cambio de variable $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, y en este caso:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2} \;;\; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \;;\; dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

También se puede utilizar alguno de los cambios anteriores o bien el método de integración por partes.

Ejemplo: $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^5 x \cdot \cos^3 x}$ si $\operatorname{tg} x = t$ $\left| \frac{1+t^2}{\frac{t^5}{(1+t^2)^{5/2}} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}} = \right| \frac{(1+t^2)\cdot dt}{(1+t^2)\cdot t^5} =$

$$= \int \frac{(1+t^2)^3}{t^5}\,dt = \int \left(t + \frac{3}{t} + \frac{3}{t^3} + \frac{1}{t^5}\right)\cdot dt = \frac{t^2}{2} + 3\ln t - \frac{3}{2\cdot t^2} - \frac{1}{4\cdot t^4} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 3\ln(\operatorname{tg} x) - \frac{3}{2\cdot \operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x} + C$$

⑦ Integración de algunas funciones irracionales

i) Si el radicando es un polinomio de 2º grado y el índice es dos siempre es posible escribir el radical de una de las siguientes maneras:

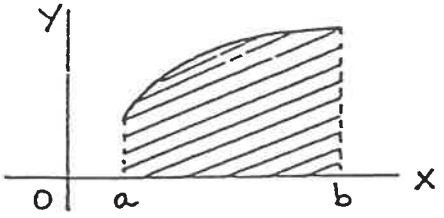
* $\sqrt{1-f^2(x)}$: se hace el cambio $f(x) = \operatorname{sen} t$
* $\sqrt{1+f^2(x)}$: " " " " $f(x) = \operatorname{tg} t$
* $\sqrt{f^2(x)-1}$: " " " " $f(x) = \sec t = \frac{1}{\cos t}$

ii) Si sólo aparecen radicales del tipo $\sqrt[p]{x}$, $\sqrt[q]{x}$, ..., $\sqrt[r]{x}$ se hace el cambio $x = t^s$ siendo $s = \text{m.c.m.}(p, q, \ldots, r)$ con lo que todas las raíces desaparecen.

III.- INTEGRAL DEFINIDA O DE RIEMANN

① El área como límite.

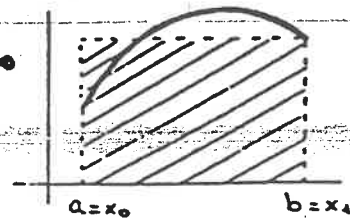
Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y positiva; es decir : $f(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$.

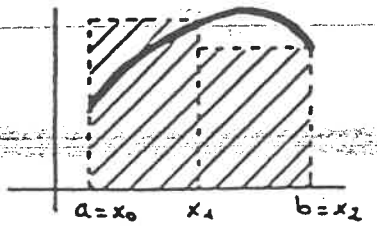


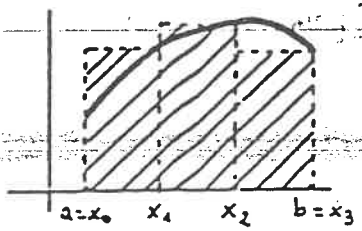
Queremos calcular el área S del recinto rayado, es decir, el área de la región determinada por la gráfica de f, las rectas $x = a$ y $x = b$ y el eje de abscisas.

Para ello procederemos de la siguiente manera: dividiremos el intervalo $[a,b]$ en dos partes iguales, luego en 3, y así sucesivamente, realizamos una partición del intervalo.

En cada uno de los pasos construiremos $2, 3, \ldots, n, \ldots$ rectángulos que tengan por base $\frac{b-a}{2}, \frac{b-a}{3}, \ldots, \frac{b-a}{n}, \ldots$ y por altura $f(x_i)$ donde x_i es el extremo superior de cada subintervalo. (También puede tomarse el extremo inferior).



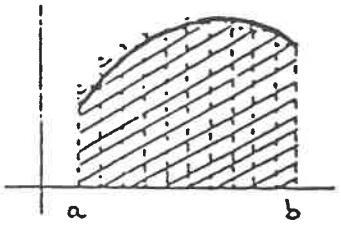




Las áreas de las figuras rayadas son:

$S_1 = (x_1 - x_0)\, f(x_1)$ $\qquad S_2 = \frac{b-a}{2} f(x_1) + \frac{b-a}{2} f(x_2)$; $S_3 = \frac{b-a}{3} f(x_1) + \frac{b-a}{3} f(x_2) + \frac{b-a}{3} f(x_3)$

$S_1 = (b-a)\, f(x_1)$ $\qquad S_2 = \frac{b-a}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right]$; $S_3 = \frac{b-a}{3}\left[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right]$



De este modo se construye una sucesión cuyo término general es:

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

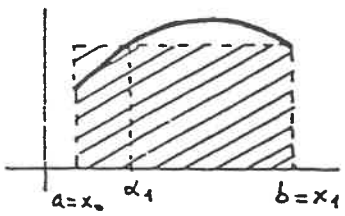
Evidentemente : $\lim (S_n) = S$

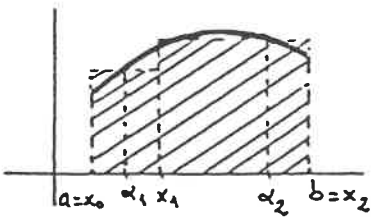
* Nota : Desde luego la construcción de la sucesión S_n se podía haber hecho de infinitas maneras distintas :

[a] Eligiendo los puntos de división del intervalo $[a,b]$ sin exigir que los subintervalos fuesen del mismo tamaño.

En este caso habría que imponer la condición de que la longitud del mayor subintervalo tendiese a cero al crecer n.

[b] Eligiendo como altura del rectángulo de base $[x_{i-1}, x_i]$, $f(\alpha_i)$, siendo α_i un punto cualquiera de $[x_{i-1}, x_i]$.





De esta manera se construiría otra sucesión (F_n) de término general:

$$F_n = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i)$$

La sucesión (S_n) es un caso particular de la sucesión (F_n) : aquél en el que las longitudes de los subintervalos son del mismo tamaño y la altura del rectángulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ es $f(x_i)$, es decir, $\alpha_i = x_i$.

TEOR.- Si f es continua en $[a,b]$, las sucesiones (F_n) son todas convergentes a un mismo punto. Dicho de otra manera:

Si f es continua en $[a,b]$, la sucesión (F_n) tiene límite y éste es independiente de la elección de los puntos de división del intervalo $[a,b]$, así como de las alturas elegidas para los rectángulos.

Es decir : $\lim (F_n) = S$.

② Integral definida de una función continua positiva.

• Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva; se llama integral definida de f en $[a,b]$ o integral definida de f desde a hasta b, y se representa por $\int_a^b f$, al límite:

$$\boxed{\int_a^b f = \lim \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(\alpha_i)}$$

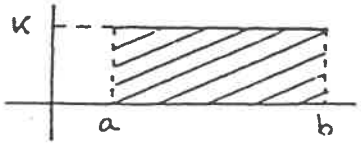
Como este límite es independiente de la sucesión que hayamos construido, se podrá escribir también:

$$\boxed{\int_a^b f = \lim \left[\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \right]}$$

El significado geométrico de $\int_a^b f$ es el área de la región del plano limitada por la gráfica de f, las rectas $x=a$ y $x=b$, y el eje de abscisas.
A los números a y b se les llama límite inferior y superior, respectivamente, de la integral defi

* Ejemplos.

[a] Sea $K \geq 0$

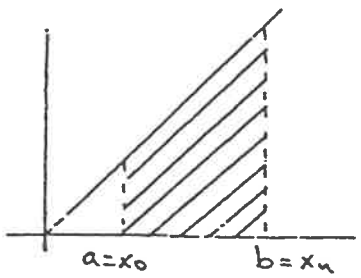


$$\int_a^b K = \lim \left[\frac{b-a}{n} \left(f(x_1) + \cdots + f(x_n) \right) \right] =$$

$$= \lim \left[\frac{b-a}{n} \underbrace{(K + K + \cdots + K)}_{n \text{ veces}} \right] =$$

$$= \lim \left(\frac{b-a}{n} \cdot K \cdot n \right) = K \cdot (b-a)$$

[b] Sea $f(x) = x$



$$\int_a^b f = \int_a^b x = \lim \left[\frac{b-a}{n} \left(f(x_1) + \cdots + f(x_n) \right) \right] =$$

$$= \lim \left[\frac{b-a}{n} \cdot (x_1 + \cdots + x_n) \right]$$

Pero $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$; $x_2 = a + 2\,\frac{b-a}{n}$

$\cdots\cdots\cdots$

$x_n = a + n\,\frac{b-a}{n} = b$

Por tanto: $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{a + \frac{b-a}{n} + b}{2} \cdot n = \frac{na + b - a + nb}{2}$.

Luego: $\int_a^b x = \lim \left[\frac{b-a}{n} \cdot \frac{na + b - a + nb}{2} \right] =$

$$= \lim \left[\frac{b-a}{2} \cdot \left(a + \frac{b}{n} - \frac{a}{n} + b \right) \right] = \frac{b-a}{2} \cdot (a+b) = \frac{b^2 - a^2}{2} =$$

$$= \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

③ Integral definida de una función continua cualquiera.

Sea $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, desentendiéndonos del significado geométrico de que partimos, el límite:

$$\lim \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i)$$

tiene sentido analítico lo tenga geométrico o no.

Por tanto, si $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua cualquiera, se llama integral definida de f en $[a,b]$ o integral definida de f desde a hasta b, y se representa por $\int_a^b f$, al límite:

$$\boxed{\int_a^b f = \lim \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i)}$$

En particular: $$\boxed{\int_a^b f = \lim \left[\frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \right]}$$

④ Reglas fundamentales de integración. (Propiedades).

[a] Aditividad del intervalo: si $c \in [a,b]$, entonces

$$\boxed{\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f}$$

D/ Como el límite que es la integral definida no depende de la construcción que hagamos de la sucesión (F_n), siempre es posible elegir los puntos de división del segmento $[a,b]$ de manera que c sea uno de ellos. Pongamos $c = x_m$, donde m variará con n. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\alpha_i) = \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) f(\alpha_i) + \sum_{i=m+1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\alpha_i)$$

Aplicando límites y recordando que el límite de una suma de sucesiones es la suma de los límites de las sucesiones sumandos, se demuestra la propiedad:

$$\lim \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i)\right] = \lim \left[\sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i)\right] + \lim \left[\sum_{i=m+1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i)\right] \Rightarrow \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

* Nota: (Extensión del concepto de integral)

En la definición que hicimos de integral se exigía que $a < b$. Vamos a extender el concepto de integral a los casos $a = b$ y $a > b$, de manera que la propiedad de la aditividad del intervalo se conserve.

- Si $c = a$: $\int_a^a f + \int_a^b f = \int_a^b f \Rightarrow \int_a^a f = 0$

  Definimos, por tanto, $\boxed{\int_a^a f = 0}$

- Si $b = a$: $\int_a^c f + \int_c^a f = \int_a^a f = 0 \Rightarrow \int_a^c f = -\int_c^a f$.

  Definimos, por tanto, $\boxed{\int_a^b f = -\int_b^a f}$, si $a > b$.

[b] **Linealidad**: si f y g son continuas en $[a,b]$, entonces:

i) $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

ii) $\int_a^b (\kappa \cdot f) = \kappa \int_a^b f \quad , \quad \forall \kappa \in \mathbb{R}$

D/ i) $\int_a^b (f+g) = \lim \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\,(f+g)(\alpha_i) =$

$= \lim \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot [f(\alpha_i) + g(\alpha_i)] =$

$= \lim \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(\alpha_i) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, g(\alpha_i) \right] =$

$= \lim \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(\alpha_i) + \lim \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, g(\alpha_i) = \int_a^b f + \int_a^b g$

ii) $\int_a^b (\kappa \cdot f) = \lim \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\,(\kappa \cdot f)(\alpha_i) =$

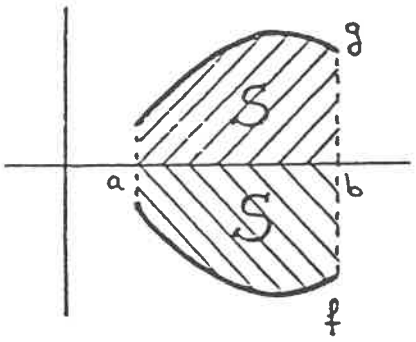
$= \lim \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot \kappa \cdot f(\alpha_i) = \lim \left[\kappa \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i) \right] =$

$= \kappa \cdot \lim \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \cdot f(\alpha_i) = \kappa \cdot \int_a^b f$

[c] **Propiedad de monotonía de la integral definida.**

* **Notas**:

1.- Significado geométrico de la integral definida de una función negativa.

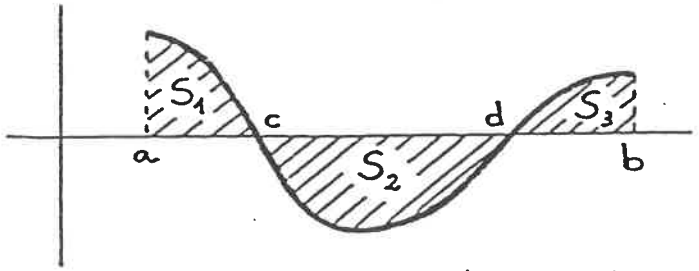


Desde luego $f = -g$.

$\int_a^b f = \int_a^b (-g) = -\int_a^b g = -S$

Por tanto: $S = -\int_a^b f$

2.- Significado geométrico de la integral definida de una función continua cualquiera.



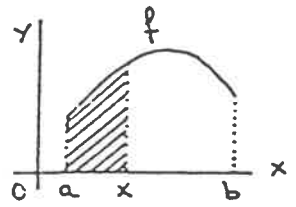
$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^d f + \int_d^b f = S_1 - S_2 + S_3$

Por tanto: $S_1 + S_2 + S_3 = \int_a^c f - \int_c^d f + \int_d^b f$

IV.- FUNCIÓN INTEGRAL

① DEF.- Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Se llama función integral de f, a la función:

$$S:[a,b] \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$



Si la función f es positiva, $S(x)$ nos da el área del recinto rayado para cada valor de x.

② Teorema del valor medio del cálculo integral.

[a] Enunciado: Si $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe un punto $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f = (b-a)\cdot f(c)$

[b] Demostración:

- Si $a=b$, el teorema es evidente ya que $\int_a^a f = 0 = (a-a)\cdot f(c)$
- Si $a<b$

Por el teorema de Weierstrass, existen α y β en $[a,b]$ tales que $f(\alpha) \le f(x) \le f(\beta)$ para todo x de $[a,b]$. Llamando $m = f(\alpha)$ y $M = f(\beta)$

$$m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$$

Por tanto $\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\cdot dx \le \int_a^b M\,dx$

$$m(b-a) \le \int_a^b f \le M(b-a)$$. Dividiendo por $b-a>0$ (ya que $a<b$)

Luego: $m \le \dfrac{\int_a^b f}{b-a} \le M$, es decir $f(\alpha) \le \dfrac{\int_a^b f}{b-a} \le f(\beta)$

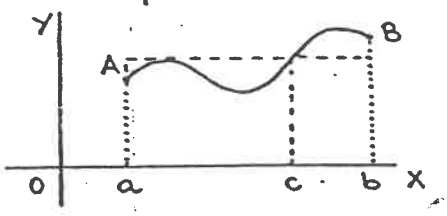
i) Si $f(\alpha) = \dfrac{\int_a^b f}{b-a} \Rightarrow \int_a^b f = (b-a)\cdot f(a)$ luego $c=a$

Si $\dfrac{\int_a^b f}{b-a} = f(\beta) \Rightarrow \int_a^b f = (b-a)\cdot f(\beta)$ luego $c=\beta$

ii) Si $f(\alpha) \neq \dfrac{\int_a^b f}{b-a} \neq f(\beta)$. Por el teorema de los valores intermedios (propiedad de Darboux), existirá c en (a,b) y por tanto también en $[a,b]$, tal que: $f(c) = \dfrac{\int_a^b f}{b-a} \Rightarrow \int_a^b f = (b-a)\cdot f(c)$

[c] Significado geométrico.

Si $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$



Indica que el área del trapecio mixtilíneo a b B A es equivalente al área de un rectángulo de base $b-a$ y altura $f(c)$ (llamada altura media).

③ Teorema fundamental del cálculo integral.

(Derivabilidad de la función integral).

[a] **Enunciado**: Si f es continua en $[a,b]$, entonces la función integral S es derivable en $[a,b]$ y además $S'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$.

[b] **Demostración**:

$$S'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f - \int_a^x f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f + \int_x^a f}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^a f + \int_a^{x+h} f}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f}{h}.$$

Calculemos los límites laterales:

i) S'_+: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{\int_x^{x+h} f}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h\cdot f(c)}{h} = \lim\limits_{\substack{c\to x\\ c>x}} f(c) = f(x)$

(Teor. valor medio calc. integral; Por ser f continua en x.)

En particular $S'_+(a) = f(a)$ (Derivada por la derecha en a)

ii) S'_-: $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{\int_x^{x+h} f}{h} = \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{-\int_{x+h}^{x} f}{h} = -\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{-h\cdot f(c)}{h} = \lim\limits_{\substack{c\to x\\ c<x}} f(c) = f(x)$

(Teor. valor medio calc. integral; Por ser f continua en x)

En particular $S'_-(b) = f(b)$ (Derivada por la izquierda en b)

Por tanto $S'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$ ya que $S'_+(x) = f(x) = S'_-(x)$

④ Regla de Barrow.

Si f es una función continua en $[a,b]$ y F es una primitiva de f, entonces: $\boxed{\int_a^b f = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b}$

D/ Sabemos, por el teorema fundamental, que $S(x) = \int_a^x f$ es una primitiva de f

Si $F(x)$ es otra primitiva de $f(x)$ se tiene que $S(x) = F(x) + K$

Si $x=a$: $S(a) = \int_a^a f = 0 = F(a) + K \Rightarrow K = -F(a)$ y sustituyendo:

Si $x=b$: $S(b) = \int_a^b f = F(b) + K = F(b) - F(a)$

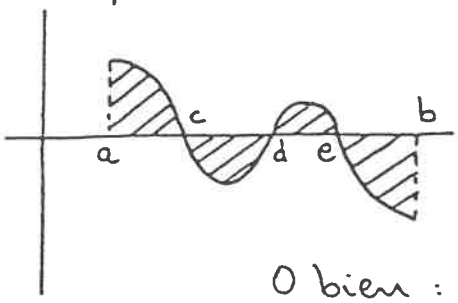
Ejemplo: $\int_1^3 (x^2 - 2x + 3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_1^3 = \left(\frac{27}{3} - 9 + 9\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 3\right) = \frac{20}{3}$

V.- ÁREA DE UNA FIGURA PLANA.

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua.

Hemos visto que si:

- f es positiva en $[a,b]$, $S = \int_a^b f$
- f es negativa en $[a,b]$, $S = -\int_a^b f$ o bien $S = \left|\int_a^b f\right|$
- f toma valores positivos y negativos en $[a,b]$, y los puntos de corte con el eje OX son $x = c, d, e$.



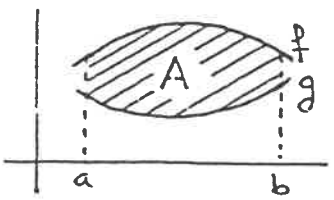
$$S = \int_a^c f - \int_c^d f + \int_d^e f - \int_e^b f$$

O bien: $$S = \left|\int_a^c f\right| + \left|\int_c^d f\right| + \left|\int_d^e f\right| + \left|\int_e^b f\right|$$

- Si no se indica el intervalo, se supone que es todo $\mathbb{R}$.

* Área limitada por la gráfica de dos funciones.

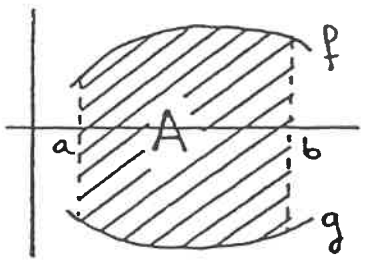
Sean S y S' los recintos limitados por las gráficas de las funciones f y g con el eje de abscisas y las rectas $x=a$ y $x=b$.

① 

Si $f(x) \geq g(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, se tiene:

A = Área de S − Área de S' =

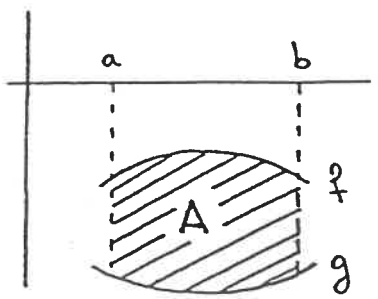
$$= \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g)$$

② 

Si $f(x) \geq 0 \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, se tiene:

A = Área de S + Área de S' =

$$= \int_a^b f - \int_a^b g = \int_a^b (f-g)$$

③ 

Si $0 \geq f(x) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, se tiene:

A = Área de S' − Área de S =

$$= -\int_a^b g + \int_a^b f = \int_a^b (f-g)$$

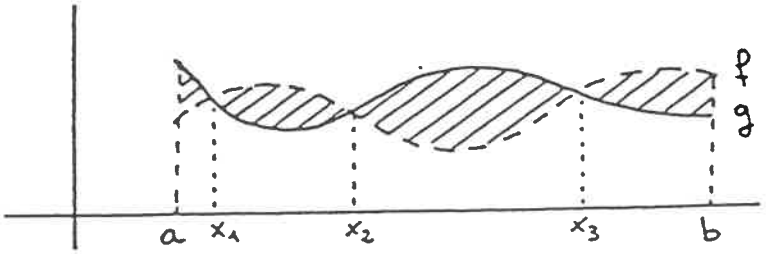
④ Si la función f es constantemente mayor que g, se calculan las abscisas de los puntos de intersección de las gráficas de f y g, es decir, se resuelve el sistema $y = f(x)$; $y = g(x)$.

Si las soluciones pertenecientes al intervalo $[a, b]$ son: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tales que $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq b$.

La superficie será:

$$S = \left| \int_a^{x_1} (f-g) \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f-g) \right| + \ldots\ldots + \left| \int_{x_n}^{b} (f-g) \right|$$

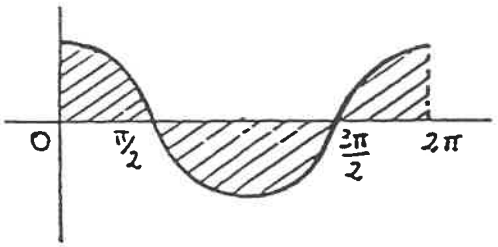
Si no se indica el intervalo $[a,b]$, se supone que es todo $\mathbb{R}$.



Ej.- Calcular el área determinada por la curva $y = \cos x$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0$ y $x = 2\pi$.

En primer lugar, calculamos los puntos de corte de la curva $y = \cos x$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 2\pi]$.

$\left.\begin{array}{l} y = \cos x \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \pi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Luego el área pedida es:



$$S = \left| \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx \right| + \left| \int_{\pi/2}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx \right| +$$

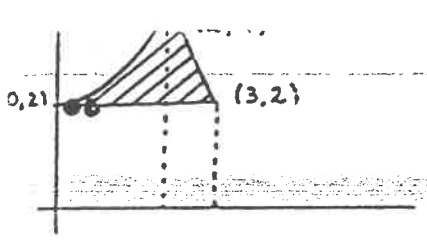
$$+ \left| \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx \right| =$$

$$= \left| [\operatorname{sen} x]_0^{\pi/2} \right| + \left| [\operatorname{sen} x]_{\pi/2}^{3\pi/2} \right| + \left| [\operatorname{sen} x]_{3\pi/2}^{2\pi} \right| = |1| + |-2| + 1 = \boxed{4 = S}$$

Ej.- Calcular el área del recinto limitado por las líneas $y = -2x + 8$; $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$; $y = 2$, en el primer cuadrante.

Calculamos los puntos de corte de cada dos de ellas.

$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x^2 + 2 \\ y = -2x + 8 \end{array}\right\} \Rightarrow (2,4)$; $\left.\begin{array}{l} y = -2x + 8 \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow (3,2)$; $\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x^2 + 2 \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,2)$



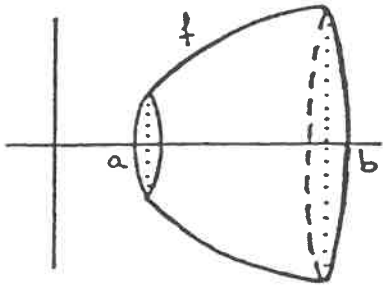
El área que nos piden es la rayada:

$$S = \left| \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 - 2\right) dx \right| + \left| \int_2^3 (-2x + 8 - 2)\, dx \right| =$$

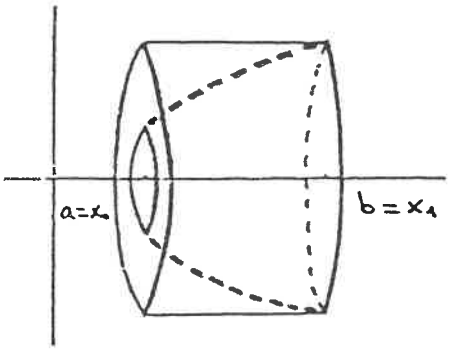
$$= \left| \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 \right| + \left| \left[-x^2 + 6x\right]_2^3 \right| = \left| \frac{8}{6} \right| + |1| = \boxed{\frac{7}{3} = S}$$

VI.- VOLUMEN DE UN CUERPO DE REVOLUCIÓN.

① Volumen engendrado por una función continua al girar alrededor del eje de abscisas en el intervalo $[a,b]$.

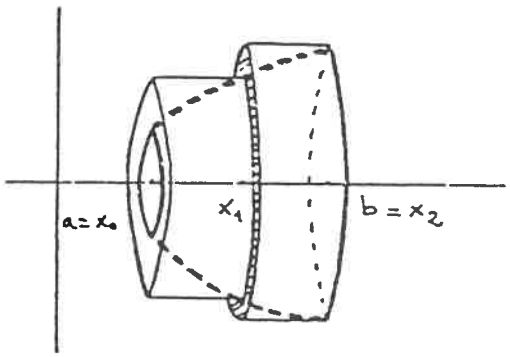


Para calcular el volumen del cuerpo de revolución engendrado procederemos a construir una sucesión cuyo límite es dicho volumen.



$$V_1 = \pi\ (f(x_1))^2\ (b-a)$$

$$V_1 = \pi\ (b-a) \cdot (f(x_1))^2$$



$$V_2 = \pi\,(f(x_2))^2\,\frac{b-a}{2} + \pi\,(f(x_1))^2\,\frac{b-a}{2} \quad \text{etc.}$$

$$V_2 = \pi\ \frac{b-a}{2}\left[(f(x_1))^2 + (f(x_2))^2\right]$$

Procediendo de esta manera : $V_n = \pi\ \dfrac{b-a}{n}\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (f(x_i))^2$

Intuitivamente se ve que $V = \lim_{n\to\infty} V_n$

$$V = \lim_{n\to\infty}\left[\pi\ \frac{b-a}{n}\ \sum_{i=1}^{n} (f(x_i))^2\right] = \pi \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\ \sum_{i=1}^{n} (f(x_i))^2\right]$$

Llamando $f^2 = g$, queda:

$$V = \pi \lim_{n\to\infty}\left[\frac{b-a}{n}\ \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\right] = \pi \int_a^b g = \pi \int_a^b f^2$$

Luego :

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2}$$

En este caso se calculan las abscisas de los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje OX, es decir, se resuelve la ecuación $f(x)=0$.

Se toman la mayor y la menor de las soluciones: x_1 y x_n.

$$V = \pi \int_{x_1}^{x_n} f^2.$$

② Volumen engendrado por el recinto limitado por dos funciones continuas al girar alrededor del eje de abscisas en el intervalo $[a,b]$.

Se procede igual que en el cálculo de áreas.

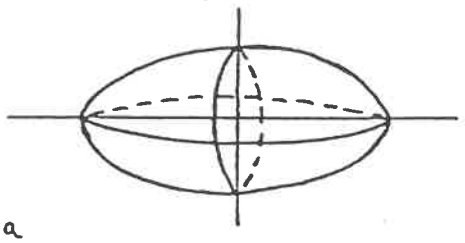
Se resuelve el sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$. Si las soluciones pertenecientes al intervalo $[a,b]$ son $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tales que $a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$,

El volumen será:

$$V = \left| \pi \int_a^{x_1} (f^2 - g^2) \right| + \left| \pi \int_{x_1}^{x_2} (f^2 - g^2) \right| + \cdots + \left| \pi \int_{x_n}^{b} (f^2 - g^2) \right|$$

* Si no se indica el intervalo, se supone que es todo $\mathbb{R}$.

Ej.- Hallar el volumen determinado por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ al girar alrededor del eje OX.



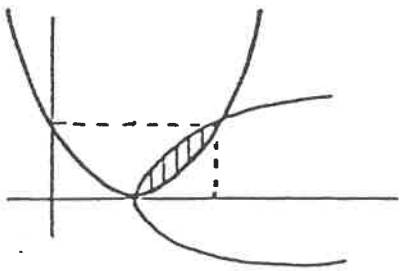
Cortes con el eje OX $(a,0)$, $(-a,0)$.

Como $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

$$V = \pi \int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\,dx = \frac{b^2\pi}{a^2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} =$$

$$= \frac{b^2\pi}{a^2}\left[a^3 - \frac{a^3}{3} + a^3 - \frac{a^3}{3}\right] = \frac{b^2\pi}{a^2} \cdot \frac{4}{3}a^3 = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

Ej.- Hallar el volumen que se determina al girar la región limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x + 1$ y $x = y^2 + 1$ alrededor de OX.



$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x + 1 \\ x = y^2 + 1 \end{array}\right\} \quad x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2 = 0\,; \text{ Sols: } x = 1,\ x = 2.$$

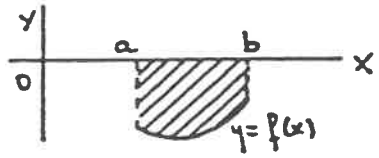
$$V = \pi \left| \int_1^2 \left((x^2 - 2x + 1)^2 - (x - 1) \right) dx \right| =$$

$$= \pi \left| \int_1^2 (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 5x + 2)\,dx \right| =$$

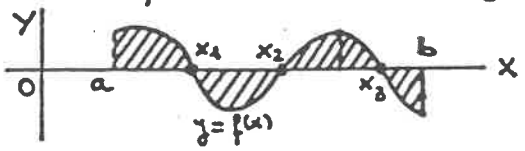
$$= \pi \left| \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + 2x^3 - \frac{5x}{2} + 2x \right]_1^2 \right| = \frac{47}{10}\pi$$

ÁREAS

* **Área limitada por la función $y=f(x)$, el eje OX, entre $x=a$ y $x=b$.**
Si $x_1<x_2<x_3$ son las soluciones de $f(x)=0$, comprendidas entre a y b:



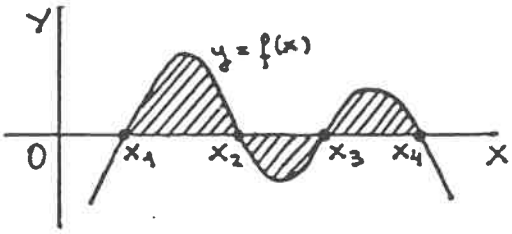
$$S=\left|\int_a^b f\right|$$



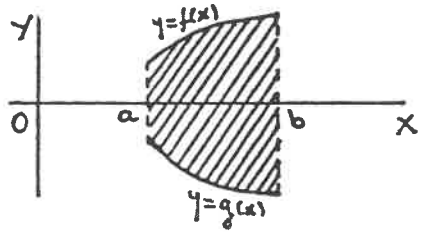
$$S=\left|\int_a^{x_1} f\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3} f\right|+\left|\int_{x_3}^{b} f\right|$$

* **Área limitada por la función $y=f(x)$ y el eje OX.**
Si $x_1<x_2<x_3<x_4$ son las soluciones de $f(x)=0$:

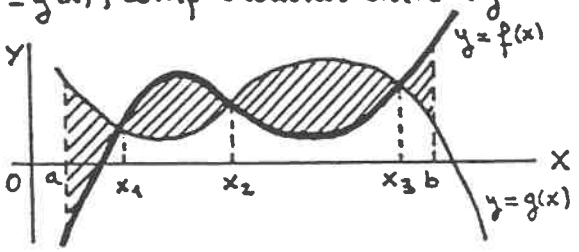
$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3} f\right|+\left|\int_{x_3}^{x_4} f\right|$$



* **Área limitada por las funciones $y=f(x)$, $y=g(x)$, entre $x=a$ y $x=b$.**
Si $x_1<x_2<x_3$ son las soluciones de $f(x)=g(x)$, comprendidas entre a y b:



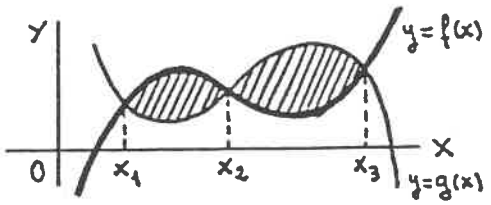
$$S=\left|\int_a^b (f-g)\right|$$



$$S=\left|\int_a^{x_1}(f-g)\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}(f-g)\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}(f-g)\right|+\left|\int_{x_3}^{b}(f-g)\right|$$

* **Área limitada por las funciones $y=f(x)$, $y=g(x)$.**
Si $x_1<x_2<x_3$ son las soluciones de $f(x)=g(x)$:

$$S=\left|\int_{x_1}^{x_2}(f-g)\right|+\left|\int_{x_2}^{x_3}(f-g)\right|$$



VOLÚMENES

* **Volumen engendrado por la función $y=f(x)$ al girar alrededor del eje OX, entre $x=a$ y $x=b$.**

$$V=\pi\int_a^b f^2$$

* **Volumen engendrado por la función $y=f(x)$ al girar alrededor del eje OX.**
Si $x_1<x_2<x_3<x_4$ son las soluciones de $f(x)=0$:

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_4} f^2$$

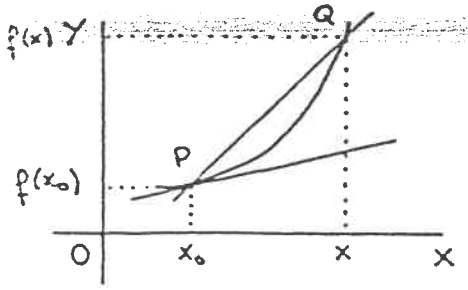
* **Volumen engendrado por el recinto limitado por las funciones $y=f(x)$, $y=g(x)$, entre $x=a$ y $x=b$.** Si $x_1<x_2<x_3$ son las soluciones de $f(x)=g(x)$, comprendidas entre a y b:

$$V=\pi\left|\int_a^{x_1}(f^2-g^2)\right|+\pi\left|\int_{x_1}^{x_2}(f^2-g^2)\right|+\pi\left|\int_{x_2}^{x_3}(f^2-g^2)\right|+\pi\left|\int_{x_3}^{b}(f^2-g^2)\right|$$

* **Volumen engendrado por el recinto limitado por las funciones $y=f(x)$, $y=g(x)$.**
Si $x_1<x_2<x_3$ son las soluciones de $f(x)=g(x)$: $V=\pi\left|\int_{x_1}^{x_2}(f^2-g^2)\right|+\pi\left|\int_{x_2}^{x_3}(f^2-g^2)\right|$

IV.- FUNCIONES DERIVABLES.

Introducción: El problema de la tangente a una curva en un punto.



Sea $y = f(x)$ una función y $P(x_0, f(x_0))$ un punto de su gráfica.

Queremos calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0, es decir, en el punto $P(x_0, f(x_0))$.

Sea $Q(x, f(x))$ un punto próximo a P.

Un vector direccional de la recta PQ es $[\vec{PQ}] = (x - x_0, f(x) - f(x_0))$, y su pendiente, que designaremos m_{PQ}, vale:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Evidentemente, si el punto Q se aproxima a P, entonces la recta PQ se aproxima a la recta tangente a la curva en el punto P.

Si designamos por m la pendiente de dicha recta tangente, resultará que: $m = \lim_{Q \to P} m_{PQ}$.

Si Q se aproxima hacia el punto P, su abscisa x se aproximará a x_0, es decir:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si hacemos el cambio de variable $h = x - x_0$, queda:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Conocida la pendiente de la recta tangente y uno de sus puntos, P, su ecuación, en forma punto-pendiente, será:

$$y - f(x_0) = m(x - x_0)$$

Ej.- Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = x^2$ en el punto de abscisa 1.

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + h^2 + 2h - 1}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 2) = \boxed{2 = m}. \text{ La ecuación será: } y - 1 = 2(x - 1),\ 2x - y - 1 = 0$$

DEF.- Se llama pendiente de una curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto $P(x_0, f(x_0))$, a la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

① Derivada de una función en un punto.

[a] DEF.- Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ una función y $x_0\in(a,b)$;

si $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe y es finito, se le llama derivada de la función f en el punto x_0, y se denota $f'(x_0)$:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

En este caso, se dice que la función f es derivable en x_0.
Si el límite no existe o es infinito, la función no es derivable en x_0.

Si hacemos el cambio de variable $x_0+h=x$, el límite anterior se puede escribir:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

* Notación: Otras formas de designar la derivada $f'(x_0)$ son:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0},\quad y'(x_0),\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x_0}$$

Ej.- Hallar la derivada de la función $f(x)=x^3$ en el punto $x_0=1$.

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h+3h^2+h^3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3$$

DIFERENCIAL

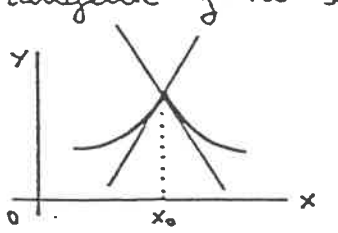
[b] Significado geométrico de la derivada de una función en un punto.

Según esto, la derivada de la función $y=f(x)$ en el punto de abscisa x_0, es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto: $f'(x_0)=m$.

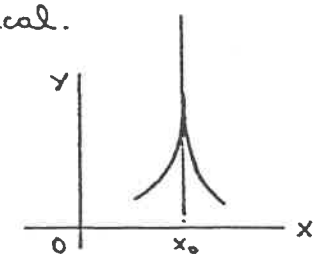
Por tanto, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y=f(x)$ en el punto $P(x_0,f(x_0))$ será:

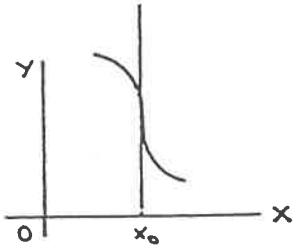
$$\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$$

Es decir, una función será derivable en un punto, cuando tenga tangente y no sea vertical.



No tiene tangente





Tienen tangente vertical

Ninguna de ellas es derivable en x_0.

[c] Condición necesaria de extremo relativo.

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivable en $x_0\in(a,b)$.
Si f tiene un extremo relativo en x_0, entonces $f'(x_0)=0$.

D/ Si f tiene un extremo relativo en $x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ f no es ni creciente, ni decreciente en $x_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ $f'(x_0)$ no es ni mayor ni menor que $0 \Rightarrow f'(x_0)=0$.

* Esta condición expresa geométricamente que la tangente a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$ es paralela al eje de abscisas.

② TEOREMA DE ROLLE

[a] Enunciado: Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y tal que $f(a)=f(b)$, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

[b] Demostración:

Como f es continua en $[a,b]$, según el teorema de Weierstrass, existen $\alpha, \beta \in [a,b]$ tal que $f(\alpha)=M$ es máximo absoluto y $f(\beta)=m$ es mínimo absoluto.

Hay que distinguir dos casos:

i) Si el máximo y el mínimo se alcanzan en los extremos, como $f(a)=f(b) \Rightarrow f(\alpha)=f(\beta)$ y por tanto f es una función constante en $[a,b]$ de ahí $f'(c)=0 \ \forall c\in(a,b)$

ii) Si uno de ellos no se encuentra en los extremos, α o β está en (a,b). Supongamos que $\alpha\in(a,b)$, por la condición necesaria de extremo relativo: f es derivable en α, por serlo en (a,b), y f tiene un extremo relativo en α, luego $f'(\alpha)=0$.

Por lo tanto existe $c=\alpha\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.

[c] Significado geométrico:

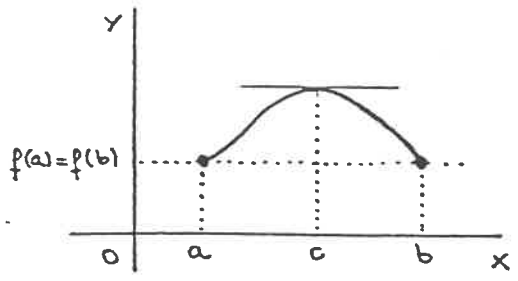


Fig 1

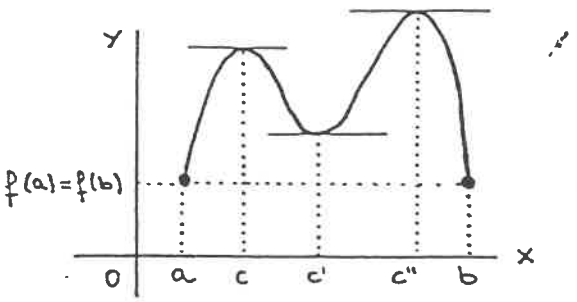


Fig 2

El teorema asegura la existencia de, al menos, un punto c en el que la tangente es horizontal ($f'(c)=0$).

En la Fig 1 hay uno y en la Fig 2 hay tres: c, c', c".

[d] Necesidad de las hipótesis: veamos que no se puede eliminar ninguna.

i) Si f es continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y $f(a) \neq f(b)$ no tiene por qué cumplir el teorema. (Fig 1)

ii) Si f es continua en $[a,b]$, $f(a)=f(b)$ pero no es derivable en (a,b) puede no cumplirlo (Fig 2)

iii) Si f es derivable en (a,b), entonces es continua en (a,b), y $f(a)=f(b)$ también debe ser continua en los extremos ya que la función de la Fig 3 no lo cumple.

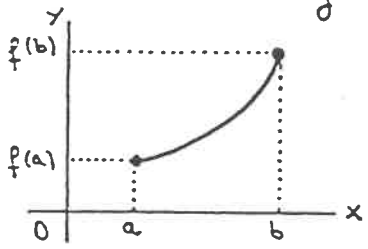


Fig 1

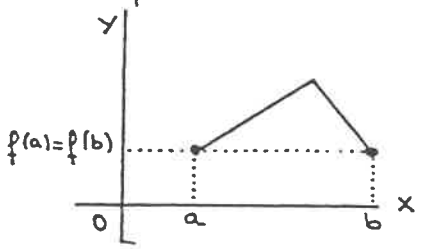


Fig 2

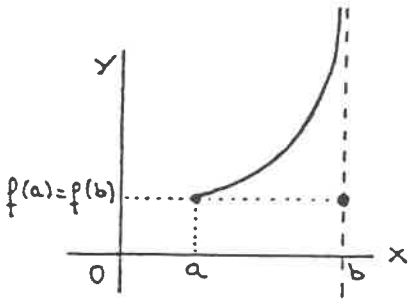


Fig 3

③ TEOREMA DEL VALOR MEDIO DE CAUCHY

[a] Enunciado: Si f y g son funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c)\cdot[g(b)-g(a)] = g'(c)\cdot[f(b)-f(a)]$$

[b] Demostración:

Consideremos la función: $F(x) = g(x)\left[f(b)-f(a)\right] - f(x)\left[g(b)-g(a)\right]$

y veamos que cumple las condiciones del teorema de Rolle:

- F es continua en $[a,b]$ por serlo f y g.
- F es derivable en (a,b) por serlo f y g.
- $F(a) = F(b)$, en efecto:

$$F(a) = g(a)\left[f(b)-f(a)\right] - f(a)\left[g(b)-g(a)\right] = g(a)\cdot f(b) - f(a)\cdot g(b)$$

$$F(b) = g(b)\left[f(b)-f(a)\right] - f(b)\left[g(b)-g(a)\right] = -g(b)\cdot f(a) + f(b)\cdot g(a)$$

Por tanto existe $c \in (a,b)$ tal que $F'(c)=0$, pero:

$$F'(x) = g'(x)\cdot\left[f(b)-f(a)\right] - f'(x)\cdot\left[g(b)-g(a)\right] \text{ luego}$$

$$F'(c) = g'(c)\left[f(b)-f(a)\right] - f'(c)\cdot\left[g(b)-g(a)\right] \text{ de donde}$$

$$f'(c)\cdot\left[g(b)-g(a)\right] = g'(c)\cdot\left[f(b)-f(a)\right]$$

④ TEOREMA DEL VALOR MEDIO DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

(TEOREMA DE LAGRANGE O DE LOS INCREMENTOS FINITOS)

[a] **Enunciado**: Si f es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

[b] **Demostración**

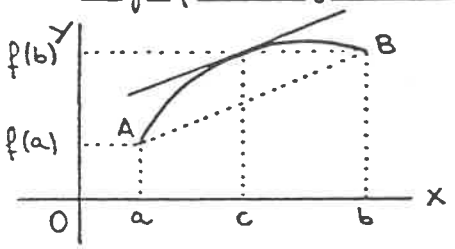
Es una consecuencia del teorema del valor medio de Cauchy, cuando tomamos $g(x) = x$, que es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), por tanto existe $c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c)\,[g(b)-g(a)] = g'(c)\,[f(b)-f(a)]$$

pero $g(b) = b$, $g(a) = a$, $g'(x) = 1 = g'(c)$ luego:

$$f'(c)\cdot(b-a) = f(b)-f(a) \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},\ c \in (a,b)$$

[c] **Significado geométrico**



Los puntos A y B tienen de coordenadas $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ por tanto $[\overrightarrow{AB}] = (b-a, f(b)-f(a))$ y la pendiente de la recta que pasa por A y B es

$$m_{AB} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Por otra parte $f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto de abscisa c.

Por tanto, lo que afirma el teorema es que existe un punto en la gráfica de la función cuya recta tangente es paralela a la recta AB.

[d] **Necesidad de las hipótesis**: veamos que no se puede eliminar ninguna.

i) Si f es continua en $[a,b]$ y no es derivable en (a,b), el teorema no se cumple. Ya que la función de la Fig 1 no tiene ningún punto de tangente horizontal.

ii) Si f es derivable en (a,b), es continua en (a,b), pero además debe ser continua en los extremos pues la función de la Fig 2 no tiene ningún punto con tangente paralela a la recta AB.

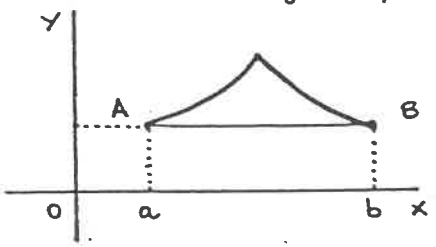


Fig 1

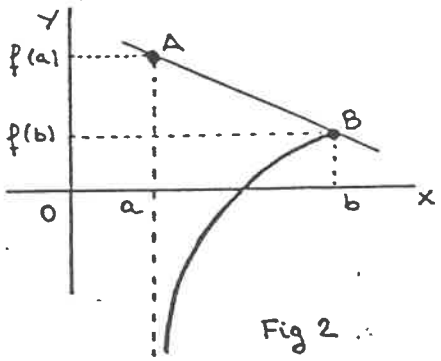


Fig 2

⑤ REGLA DE L'HÔPITAL

[a] **Enunciado**: Sean f y g funciones reales derivables en un entorno del punto a con $g'(x) \neq 0 \ \forall x \neq a$ y tales que $f(a) = g(a) = 0$.

Si existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ también existe $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y ambos son iguales.

[b] **Demostración**

Sea $(a-\delta, a+\delta)$ el entorno de a en el que f y g son derivables.

Si $x \in (a-\delta, a+\delta)^{x \neq a}$ puede ocurrir:

i) **Si $x > a$**: aplicamos el teorema del valor medio de Cauchy al intervalo $[a,x]$ y obtenemos que existe $\alpha \in (a,x)$ tal que

$$f'(\alpha) \cdot [g(x) - g(a)] = g'(\alpha) \cdot [f(x) - f(a)]$$

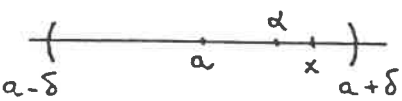
como $f(a) = g(a) = 0$ obtenemos $f'(\alpha) \cdot g(x) = g'(\alpha) \cdot f(x)$ $(\circledast)$

- $g'(\alpha) \neq 0$ por hipótesis ya que $\alpha \in (a-\delta, a+\delta)$ y $\alpha \neq a$
- $g(x) \neq 0$, en efecto, si $g(x) = 0$ se tendría:

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = g(a) = 0 \\ g \text{ continua en } [a,x] \\ g \text{ derivable en } (a,x) \end{array}\right\} \overset{\text{T}^{\text{a}} \text{ Rolle}}{\Rightarrow} \exists c \in (a,x) \ni g'(c) = 0$$

que está en contradicción con la hipótesis $g'(x) \neq 0$ en el entorno.

Por tanto, la expresión $\circledast$ se podrá escribir: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$



Si $x \to a$ también $\alpha \to a$, con lo que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{\alpha \to a \\ \alpha > a}} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

ii) **Si $x < a$**: aplicamos el mismo procero al intervalo $[x,a]$ y obtenemos $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\substack{\alpha \to a \\ \alpha < a}} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$

Ahora bien, si existe $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, también existen los límites laterales y son iguales, luego $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\alpha \to a} \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)} \overset{\text{cambiar la variable } \alpha \text{ por } x}{=} \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

La regla de L'Hôpital también puede ser utilizada en el caso $x \to \pm\infty$ o cuando $\lim f(x) = \pm\infty$ y $\lim g(x) = \pm\infty$ (Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$)

* Aplicaciones: Sea $a \in \mathbb{R}$ ó $a = \pm\infty$

[a] Indeterminaciones del tipo 0^0, ∞^0: $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}[g(x)\cdot \ln f(x)]}$

Ej.- $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right]} = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{-\ln x}{x}\right]} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-1/x}{1}} = e^0 = 1$

[b] Indeterminaciones del tipo 1^∞: $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}[g(x)\cdot(f(x)-1)]}$

Ej.- $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x^2}\cdot(\cos x - 1)\right]} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2}} = e^{-1/2}$

También se pueden calcular estos límites tomando logaritmos nepenianos.

* Equivalencias.

- Una función, $f(x)$, es infinitésimo en a si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.
- Dos infinitésimos f y g en a son equivalentes cuando $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Se expresa poniendo $f(x) \sim g(x)$.
- Se puede sustituir un infinitésimo, en un producto o cociente, por otro equivalente, pero nunca en una suma o diferencia.
- Si $x \to 0$: $\operatorname{sen} x \sim x$; $\operatorname{tg} x \sim x$; $\operatorname{arc\,sen} x \sim x$; $\operatorname{arc\,tg} x \sim x$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \quad ; \quad e^x - 1 \sim x \quad ; \quad \ln(1+x) \sim x$$

⑥ Consecuencias del teorema del valor medio: crecimiento y decrecimiento.

TEOR.- Si f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b):

i) Si $f'(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$ entonces f es constante en $[a,b]$
ii) Si $f'(x) > 0$ " " " " creciente " "
iii) Si $f'(x) < 0$ " " " " decreciente " "

D/

i) Sea $x_0 \in [a,b] \nexists x_0 \neq a$. Aplicando el teorema del valor medio a la función f en el intervalo $[a, x_0] \Rightarrow \exists c \in (a, x_0) \nexists f'(c) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}$

Pero como $f'(c) = 0$, ya que $c \in (a, x_0) \subset (a,b)$, entonces $f(x_0) = f(a)$ $\forall x_0 \neq a$, y evidentemente también vale si $x_0 = a$ ($f(a) = f(a)$), luego f toma en cualquier punto $x_0 \in [a,b]$ el mismo valor $f(a)$ y, por tanto, f es constante en $[a,b]$.

ii) Sean $x_1, x_2 \in [a,b]$ puntos cualesquiera de $[a,b]$ donde $x_1 < x_2$. Aplicando el teorema del valor medio a la función f en el intervalo $[x_1, x_2] \Rightarrow \exists c \in (x_1, x_2) \nexists f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Pero como $f'(c) > 0$, ya que $c \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$, entonces $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0$

Ahora bien, como $x_1 < x_2 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

luego f es creciente en $[a,b]$.

iii) Análoga a ii), queda como ejercicio.

4 TEOR.- La recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$ es la única recta $y = \alpha + \beta(x-a)$ que verifica:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \alpha - \beta(x-a)}{x-a} = 0 \qquad (*)$$

D/ i) Veamos, en primer lugar, que la recta tangente $y = f(a) + f'(a) \cdot (x-a)$ verifica la condición $(*)$.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)\cdot(x-a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - f'(a)}{1} = \frac{0}{1} = 0 .$$

ii) Veamos, en segundo lugar, que es la única recta que verifica $(*)$.

Sea $y = \alpha + \beta(x-a)$ otra recta que cumpla $(*)$, esto es, tal que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \alpha - \beta(x-a)}{x-a} = 0$$

Ahora bien, si $f(x) - \alpha - \beta(x-a)$ tiende a 0, cuando $x \to a$, incluso dividiéndolo por $x-a$, entonces también tenderá a 0 sin dividirlo por $x-a$; es decir:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - \alpha - \beta(x-a)] = 0 \Rightarrow f(a) - \alpha = 0 \Rightarrow \underline{\alpha = f(a)}$$

Sustituyendo este valor en $(*)$ queda:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \beta(x-a)}{x-a} = 0 \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{f'(x) - \beta}{1} = f'(a) - \beta = 0 \Rightarrow \underline{\beta = f'(a)}$$

Por tanto, la recta tangente es la recta que "mejor se aproxima" a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

V.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

① Dominio de definición o campo de existencia: conjunto de números reales para los cuales está definida la función. Si el dominio es la unión de un número finito de intervalos, $\text{Dom } f = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n$, conviene estudiar el comportamiento de la función en los extremos de los mismos.

② Simetrías

[a] Respecto del eje OY (funciones pares): si $f(-x) = f(x)$ $(-x \in \text{Dom } f)$

[b] Respecto del origen (funciones impares): si $f(-x) = -f(x)$ $(-x \in \text{Dom } f)$

En ambos casos basta dibujar la gráfica en la parte correspondiente a las abscisas positivas y completarla por simetría.

③ Periodicidad

$f(x)$ es periódica si existe $T \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x+T) = f(x)$ $(x+T \in \text{Dom } f)$.
Basta dibujar la gráfica en el intervalo $[0, T)$ y completarla por periodicidad.

④ Cortes con los ejes

[a] Con el eje OX: resolver el sistema $y = f(x)$; $y = 0$

[b] Con el eje OY: resolver el sistema $y = f(x)$; $x = 0$

⑤ Signo de la función. Regiones de existencia.

El signo de una función sólo puede variar en los puntos de corte con el eje OX o al pasar de uno a otro de los intervalos que constituyen su dominio. Ello permite trazar las regiones del plano donde no existe gráfica.

⑥ Ramas infinitas.

$f(x)$ tiene una rama infinita cuando x, $f(x)$ o ambos crecen infinitamente.

[A] • Asíntotas verticales: $x = a$, si existe alguno de los siguientes límites: $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \pm\infty$; $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \pm\infty$.

En la práctica, se estudian los puntos que anulan el denominador de $f(x)$.

• si $\boxed{x \to +\infty}$: calcular $\lim_{x \to +\infty} f(x) = K$

[b] si $K \in \mathbb{R} \Rightarrow y = K$ asíntota horizontal.

[c] si $K = \pm\infty \Rightarrow$ calcular $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

- si $m = \pm\infty \Rightarrow$ rama parabólica en la dirección del eje OY
- si $m = 0 \Rightarrow$ rama parabólica en la dirección del eje OX.
- si $m \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$ calcular $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = b$
  - si $b \in \mathbb{R} \Rightarrow y = mx + b$ asíntota oblicua.
  - si $b = \pm\infty \Rightarrow$ rama parabólica en la dirección $y = mx$.

• si $\boxed{x \to -\infty}$: estudio totalmente análogo.

⑦ Continuidad. Discontinuidades.

$f(x)$ es continua en todos los puntos donde $f'(x)$ exista.
En los puntos en los que $f'(x)$ no exista y en los extremos de los intervalos que constituyen el dominio de $f(x)$ habrá que estudiar la continuidad.

⑧ Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos relativos.

[a] Estudiar el signo de $f'(x)$.
- si $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es decreciente.
- si $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es creciente.

[b] Resolver la ecuación $f'(x) = 0$, si las soluciones son $x = x_i$
- si $f''(x_i) < 0 \Rightarrow f$ tiene en x_i un máximo relativo.
- si $f''(x_i) > 0 \Rightarrow f$ tiene en x_i un mínimo relativo.
- si $f''(x_i) = 0$ (utilizar otros criterios)

⑨ Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión.

[a] Estudiar el signo de $f''(x)$.
- si $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es cóncava
- si $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es convexa

[b] Resolver la ecuación $f''(x) = 0$, si las soluciones son $x = x_j$
- si $f'''(x_j) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene en x_j un punto de inflexión.
- si $f'''(x_j) = 0$ (utilizar otros criterios)

⑩ Cuadro de valores.

CUADRO DE DERIVADAS

$y = u^m$	$y' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$
$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$
$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
$y = a^u$	$y' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$
$y = e^u$	$y' = e^u \cdot u'$
$y = \operatorname{sen} u$	$y' = u' \cdot \cos u$
$y = \cos u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{sen} u$
$y = \operatorname{tg} u$	$y' = u' \cdot \sec^2 u = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 u)$
$y = \cot u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{cosec}^2 u = \frac{-u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -u' (1 + \cot^2 u)$
$y = \sec u$	$y' = u' \cdot \sec u \cdot \operatorname{tg} u$
$y = \operatorname{cosec} u$	$y' = -u' \cdot \operatorname{cosec} u \cdot \cot u$
$y = \operatorname{arc\,sen} u$	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = \arccos u$	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1 - u^2}}$
$y = \operatorname{arc\,tg} u$	$y' = \frac{u'}{1 + u^2}$
$y = \operatorname{arc\,cot} u$	$y' = \frac{-u'}{1 + u^2}$
$y = \operatorname{arc\,sec} u$	$y' = \frac{u'}{\lvert u \rvert \cdot \sqrt{u^2 - 1}}$
$y = \operatorname{arc\,cosec} u$	$y' = \frac{-u'}{\lvert u \rvert \cdot \sqrt{u^2 - 1}}$

CUADRO DE INTEGRALES

$$\int u^m(x) \cdot u'(x) \cdot dx = \frac{u^{m+1}(x)}{m+1} + C \quad (m \neq -1)$$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} \cdot dx = \ln u(x) + C$$

$$\int a^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot dx = \frac{a^{u(x)}}{\ln a} + C$$

$$\int e^{u(x)} \cdot u'(x) \cdot dx = e^{u(x)} + C$$

$$\int \operatorname{sen} u(x) \cdot u'(x) \cdot dx = -\cos u(x) + C$$

$$\int \cos u(x) \cdot u'(x) \cdot dx = \operatorname{sen} u(x) + C$$

$$\int \sec^2 u(x) \cdot u'(x) \cdot dx = \operatorname{tg} u(x) + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 u(x) \cdot u'(x) \cdot dx = -\cot u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x) \cdot dx}{\sqrt{1 - u^2(x)}} = \operatorname{arc\,sen} u(x) + C$$

$$\int \frac{u'(x) \cdot dx}{1 + u^2(x)} = \operatorname{arc\,tg} u(x) + C$$

TEMA 37 X

PROGRESIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS

37-1 INTRODUCCION HISTORICA.

En el siglo V a.c., aparte del problema plantoado por Pitágoras de los números irracionales, tres son los problemas plantoados, que por su dificultad, hacen desconfiar de la posibilidad de alcanzar una armonía completa y definitiva. Estos son:

1º.- El problema de la trisección del ángulo

2º.- El problema de la duplicación del cubo

3º.- El problema de la cuadratura del círculo.

Fueron múltiples los intentos para resolver estos tres problemas y se llegó incluso a soluciones oficiales y dignas de tomarse en cuenta, Pero lo que nosotros queremos resaltar aquí es que de este ambiente surgen las posturas entre los matemáticos de la época: Los que opinan que la medición de volúmenes o superficies de figuras curvilíneas han de conducir necesariamente a resultados irracionales, es decir, siempre a resultados aproximados y por otra parte los que opinan que la dificultad estriba en la carencia de métodos disponibles, es decir con unos conocimientos más profundos se podrían obtener resultados racionales.

De esta segunda forma de pensar fué Hipócrates de Chios, quien de forma irrefutable había logrado relacionar sus figuras limitadas por curvas por todas partes con un triángulo rectángulo de forma estrictamente racional, y así transformar dicho triángulo en un rectángulo de área equivalente. Se había llegado a la "cuadratura" perfecta de una figura curvilínea.

Aunque Hipócrates abre un panorama de grandes esperanzas en todos aquellos matemáticos que buscaban la cuadratura del círculo, hubo de recurrirse a otro método empleado en la cuadratura y cubatura, que consistía en ir rellenando la figura curvilínea con figuras rectilíneas, y sumar por último estas figuras. Para que dicho procedimiento no fuese de aproximación había de formarse una suma de infinitos sumandos.

Dos preguntas surgen a este respecto:

1ª) ¿Cómo podría lograrse dicha suma?

2ª) ¿Acaso una suma como ésta no daría como resultado una magnitud infinita, aún cuando los sumandos fuesen pequeñísimos?

Enmedio de esta confusión, surge un matemático contemporáneo de Platón, llamado Eudoxo , que resuelve el dilema entre "finito" e "infinito" al introducir el concepto "tan pequeño como queramos ". El mismo dice: "Cuando de una magnitud deducimos la mitad o más de la mitad, y repetimos dicha operación tantas veces como queramos, siempre podemos llegar a una magnitud que es menor que cualquier otra magnitud dada de la misma especie".

Por tanto, la progresión que se puede formar partiendo de esta magnitud y la serie tienen un valor límite, que para la primera es igual a cero y para la segunda es un número finito. Este método parece aplicado un sinnúmero de veces en los "Elementos de Euclides". Por ejemplo, para demostrar que la circunferencia puede considerarse como un polígono de tantos lados como se quiera, sustituyendo los segmentos que quedan entre el polígono y la circunferencia por triángulos, que progresivamente, van satisfaciendo la condición de Eudoxo y cuya magnitud puede ser inferior siempre a cualquier otra medida determinada. Al hacerse esta operación, el círculo se "agota" y por este motivo este método de demostración recibe en el siglo XVI el nombre de método "exhaustivo".

Aunque con Eudoxo , los griegos conocen un método . infinitesimal. rigurosamente lógico y aunque lo emplearon, pero en casos muy aislados, están condicionados por su concepto de geometría, es decir, intentan la cuadratura y curvatura de figuras, con métodos más acordes con el pensamiento de Hipócrates.

Queda patente, una vez hecho este panorama histórico, que las progresiones eran conocidas de los griegos y surgen a la hora de hacer cuadraturas de figuras curvilíneas, mediante el "método exhaustivo". Así Arquímedes (287-212 a.C.) en la cuadratura de la espiral, se encuentra con una progresión aritmética de 2º orden: $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$ y demuestra que $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$. También está familiarizado con la progresión geométrica $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots, (\frac{1}{4})^{n-1}, \ldots$ y la serie geométrica convergente $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots$ que se plantea en la cuadratura de la parábola.

Históricamente, las progresiones aritméticas y geométricas han de

sempeñado un papel importantísimo en el desarrollo de los logaritmos y construcción de tablas logarítmicas.

Miguel Stifel (1487-1567) en su "Aritmética íntegra", compara las siguientes progresiones

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 .....

1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 ....

y observa las siguientes normas

1º.- La multiplicación en la progresión geométrica corresponde a la adición en la aritmética. En efecto, si queremos multiplicar 4.16, 4 está debajo de 2 y 16 debajo de 4, sumamos $2 + 4 = 6$, y el número que está debajo de 6 es la multiplicación deseada.

2º.- La división en la progresión geométrica corresponde a la sustracción en la aritmética. En efecto, si queremos dividir 128:32, 128 está debajo de 7 y 32 está debajo de 5, restamos $7 - 5 = 2$ y el número que está debajo de 2 es la división deseada.

3º.- La potenciación en la progresión geométrica corresponde a la multiplicación en la aritmética. En efecto: $2^3 = 2.2.2$, 2 está debajo de 1, sumando $1 + 1 + 1 = 3$, el número que está debajo de 3 es la potencia requerida.

4º.- La radicación en la progresión geométrica corresponde a la división en la aritmética. En efecto, si queremos hallar $\sqrt[3]{512}$, entonces 512 está debajo de 9, dividiendo $9:3 = 3$, el resultado requerido está debajo de 3, es decir, $\sqrt[3]{512} = 8$.

Estas normas extraídas de la observación de las progresiones aritméticas y geométricas, nos permiten rebajar en un grado las primeras tres operaciones aritméticas.

Jost Bürgi (1552-1632) y lord John Napir (1550-1617), señor de Merchiston, o tal como se decía en latín, Neporus, trabajan sobre el mismo problema. Bürgi fué el primero en dominar el instrumento de los logaritmos pero debido a su carácter temporalizador, ocultó su secreto y no lo hizo público. Kepler le reprochó "haber dejado desamparado al hijo de su monte, en lugar de educarlo para la fama". Bürgi obtiene sus "Tablas progresivas" considerando las dos progresiones de Stifel y observando dos cosas:

1º) Dichas series no tienen ningún valor práctico, si no se aproximan hasta el máximo los números. En efecto, en la progresión geométrica,

1, 2, 4, 8, 16, etc., los intervalos entre cada dos números van haciéndose cada vez mayores, y por tanto no sería posible realizar el producto 25 . 37, por ejemplo.

2º) Las propiedades deducidas por Stifel en sus progresiones, no son exclusivas de las progresiones geométricas de razón 2, sino que se extendía a todas las progresiones geométricas con razón q, cumpliendo ciertas condiciones; la progresión aritmética tenía que empezar por cero y la progresión geométrica por 1, para que subsistiese la propiedad logarítmica.

37-2 SUCESIONES DE NUMEROS REALES.

37-2.1 DEFINICION.- Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto de los números naturales en el conjunto de los números reales. Se designa por $f: N \longrightarrow R$.

Es decir a todo número natural n, le corresponde uno y sólo un número real f(n).

Por extensión de lenguaje, se llama también sucesión de números reales a la Im(f), donde sus elementos están ordenados de manera similar que el conjunto de los números naturales N, es decir:

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$$

o también:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

Cada $a_i (i=1,2,3,\ldots,n,\ldots)$ se llama término de la sucesión y a a_n se lo llama término general; una sucesión cuyo término general sea a_n puede expresarse abreviadamente con (a_n).

Ejemplos:

La sucesión $(a_n) = (n)$ es: $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

La sucesión $(b_n) = ((-1)^n)$ ": $-1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

La sucesión $(c_n) = (\frac{1}{n})$ ": $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

OBSERVACIONES:

1.- Una sucesión está definida si y sólo si es posible escribir sus términos en orden hasta que se quiera. Esto equivale a la suposición tácita de que los elementos no bastan, y es preciso conocer la función de n, o el término general. Por ejemplo $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ no es una sucesión, porque no sabemos cuál es el término siguiente a $\frac{1}{4}$, que

puedo ser -6, $\sqrt{3}$, o cualquier otro. Por otro lado $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ sí es una sucesión porque podemos escribir todos sus términos en orden hasta que se quiera.

2.- De lo dicho, se deduce que el término general , no se puede extraer de un conjunto finito de términos. Si iniciamos una sucesión de términos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, podemos pensar que el término general es $\frac{1}{n}$. Suponerlo es caer en un error simplísimo; también la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{2}{3}, \ldots$ $(25/12 - 35/24n - 5/12\, n^2 - 1/24\, n^3), \ldots$ tiene iguales los cuatro primeros términos de la sucesión.

Puesto que una sucesión es una función cuyo dominio es N, podemos hacer una representación cartesiana de sucesiones como caso particular de funciones.

37-3 PROGRESIONES ARITMETICAS

37-3.1 DEFINICION.- Se llama progresión aritmética a una sucesión de números reales cuyo término general es de la forma $a_n = an + b$, donde a y b son números reales fijos y $a \neq 0$.

Ejemplos:

Si $a_n = 2n+1$, la progresión aritmética será: 3, 5, 7, ..., 2n+1, ...

Si $a_n = n$, " " " " 1, 2, 3, .., n, ...

37-3.2 PROPIEDAD FUNDAMENTAL.- La propiedad fundamental de las progresiones aritméticas, es que la diferencia entre cada dos términos consecutivos, es una constante que coincide con el coeficiente de n en la expresión del término general.

En efecto, si $a_n = an + b$ y $a_{n+1} = a(n+1) + b$, entonces

$$a_{n+1} - a_n = an + a + b - an - b = a$$

Por esta razón, cada término de la progresión aritmética, excepto el primero, se puede obtener sumando al término anterior el número constante a, llamado diferencia de la progresión y designado comúnmente mediante la letra d.

Esto nos permite dado un número cualquiera a_1 y otro número $d \neq 0$ formar una progresión aritmética.

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + d$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$
$$a_4 = a_3 + d = a_2 + 2d = a_1 + 3d$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_n = a_{n-1} + d = a_{n-2} + 2d = \ldots = a_1 + (n-1)d$$

La expresión $a_n = a_1 + (n-1)d$, nos indica que podemos obtener cualquier término de la progresión, conociendo únicamente el primer término y la diferencia d.

Esta expresión se puede obtener de una forma más sencilla, partiendo del término general de la progresión:

$$a_n = dn + b$$
$$a_1 = d + b$$

Restando miembro a miembro nos queda,

$$a_n - a_1 = d(n-1), \quad \text{de donde} \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

Si queremos expresar el término a_n, por medio del término a_k y de la diferencia de la progresión pondremos $(k<h)$

$$a_h = dh + b$$
$$a_k = dk + b$$

Restando se obtiene:

$$a_h - a_k = d(h-k), \quad \text{de donde} \quad a_h = a_k + d(h-k)$$

37-3.3 INTERPOLACION DE TERMINOS

Un problema que se puede plantear, es el de "intercalar" o "interpolar" varios términos entre dos números dados de modo que formen parte de una progresión aritmética. Se dice entonces que todos estos términos (incluyendo los extremos) están en "progresión aritmética" o forman progresión aritmética. A los términos que están entre el primero y el último se les suele llamar medios aritméticos.

Así, si queremos interpolar n términos entre a y b, de forma que constituyan una progresión aritmética de diferencia d

$$b = a + (n+2-1)d = a + (n+1)d, \qquad \text{de donde}$$

$$d = \frac{b - a}{n + 1}$$

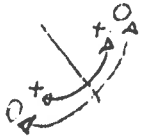
Ejemplo: Si entre 3 y 10 queremos interpolar 3 términos:

$$d = \frac{10 - 3}{3 + 1} = \frac{7}{4}$$

$$3, \frac{19}{4}, \frac{26}{4}, \frac{33}{4}, 10$$

37-4 ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS PROGRESIONES ARITMETICAS.

37-4.1 PROPOSICION.- La suma de dos términos cualesquiera que equidistan de dos extremos es igual a la suma de éstos.



Demostración: En efecto: sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$, números que "forman progresión aritmética"; dos términos equidistantes de los extremos a_1 y a_n son

$$a_{1+k} \quad \text{y} \quad a_{m-k} \quad (k < m)$$

Sumando tenemos:

$$a_{1+k} + a_{m-k} = a_1 + kd + a_m - kd = a_1 + a_m$$

37-4.2 PROPOSICION.- La suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética es igual a la mitad de n veces la suma de sus extremos.

Demostración: En efecto, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son n términos consecutivos de una progresión aritmética:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots$$
$$\ldots + a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots$$
$$\ldots + a_n - (n-1)d$$

Sumando miembro a miembro

$$2S_n = \overbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots\ldots + (a_1 + a_n)}^{n \text{ veces}}$$

de donde:

$$\boxed{S_n = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}}$$

Si sustituímos $a_n = a_1 + (n-1)d$ obtenemos la expresión equivalente

$$\boxed{S_n = n\,a_1 + \frac{n\,(n-1)}{2} \cdot d}$$

37-5 PROGRESIONES ARMONICAS

Se llama progresión armónica a una sucesión de números reales cuyo término general es de la forma $a_{n+1} = \frac{1}{an + b}$, donde a y b son números reales fijos y $a \neq 0$.

Es decir, es una progresión formada por los recíprocos de una progresión aritmética.

Es obvio que para formar el término general de la progresión, se halla el término general de la progresión aritmética y después se forma su recíproco. Reciben estas progresiones el nombre de armónicas, porque si cuerdas de igual peso se sujetan a iguales tensiones, producirán un sonido armónico si sus longitudes forman una progresión armónica.

37-6 PROGRESIONES GEOMETRICAS

37-6.1 DEFINICION.- Se llama progresión geométrica de números reales a una sucesión de números reales cuyo término general es de la forma $a_n = a\,r^n$, donde a y r son números reales fijos y no nulos.

Ejemplos:

a) $6, 18, 54, \ldots, 2.3^n, \ldots$

b) $1/6, 1/36, 1/216, (1/6)^n, \ldots$

37-6-2 PROPIEDADES FUNDAMENTALES DE LAS PROGRESIONES GEOMETRICAS

La propiedad fundamental de las progresiones geométricas es que la razón entre dos términos consecutivos es una constante que coincide con el número r que aparece en su término general.

En efecto:

Si $a_n = a.r^n$ y $a_{n+1} = a.r^{n+1}$, entonces

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \frac{a.r^n.r}{a.r^n} = r$$

El número r recibe el nombre de razón de la progresión geométrica.

Por este motivo, cada término de la progresión geométrica excepto el primero, se puede obtener multiplicando el término anterior por r.

Si $r>1$, cada término de la progresión será mayor que el anterior, y la progresión se llama "monótona creciente" (suponiendo $a_1>0$).

Si $r<0$, los términos son de signo opuesto de forma alternativa, y la progresión alternada.

A la vista de estas propiedades, es obvio que podemos formar una progresión geométrica si nos dan su primer término y la razón, así:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot r \\ a_3 &= a_2 \cdot r = a_1 \cdot r^2 \\ \cdots &\quad \cdots \quad \cdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot r = a_{n-2} \cdot r^2 = \cdots = a_1 \cdot r^{n-1} \end{aligned}$$

La expresión $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, nos permite hallar cualquier término de la progresión, en función de a_1 y r.

Esta expresión se puede hallar de forma más sencilla, así:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= a \cdot r^n \\ a_1 &= a \cdot r \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{a_n}{a_1} = r^{n-1}, \quad \text{de donde} \quad \boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Si queremos expresar el término a_h, por medio del término a_k $(k\ h)$ y es r la razón de la progresión, tendremos:

$$\left.\begin{aligned} a_h &= a \cdot r^{h-1} \\ a_k &= a \cdot r^{k-1} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{a_h}{a_k} = \frac{r^{h-1}}{r^{k-1}}, \quad \text{de donde}$$

$$a_h = a_k \cdot r^{(h-1)-(k-1)} = a_k \cdot r^{h-k}$$

37-6.3 INTERPOLACION DE TERMINOS PROPORCIONALES.

Queremos intercalar entre dos números arbitrarios, otros, de forma que todos ellos formen parte de una progresión geométrica. Se dice entonces que "están en progresión geométrica", o "forman progresión geométrica".

Si queremos interpolar n términos entre a y b, podemos considerar a a como primer término de la progresión geométrica y a b como el término que ocupe la posición $n+2$. Entonces:

$$b = a \cdot r^{n+2-1} = a \cdot r^{n+1}$$

de donde:

$$r = \sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

Una vez conocida la razón el problema queda resuelto.

Ejemplo: Si queremos interpolar entre 8 y 24 tres términos

$$r = \sqrt[4]{\frac{24}{8}} = \sqrt[4]{3}$$

Por tanto, los cinco términos que están en progresión geométrica son:

$$8,\ 8.\sqrt[4]{3},\ 8.(\sqrt[4]{3})^2,\ 8(\sqrt[4]{3})^3,\ 24.$$

37-7 ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS PROGRESIONES GEOMETRICAS

37-7.1 PROPOSICION.- El producto de los términos equidistantes de otros dos extremos es igual al producto de éstos.

Demostración: En efecto, sean $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números que "forman progresión geométrica"; dos términos equidistantes de los extremos a_1 y a_n son:

$$a_{1+k} \text{ y } a_{n-k} \quad (k<m)$$

Multiplicando, tenemos:

$$a_{1+k} \cdot a_{m-k} = (a_1 \cdot r^k)(a_1 \cdot r^{m-k-1}) = a_1 \cdot a_1 \cdot r^{m-1} = a_1 \cdot a_m$$

37-7.2 PROPOSICION.- El producto de n términos consecutivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$.

Demostración: En efecto, sea

$$\begin{aligned} P_n &= a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \\ P_n &= a_n \cdot a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_1 \end{aligned}$$

$$P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n, \quad \text{de donde} \quad P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n} \quad \text{c.q.d.}$$

37-7.3 PROPOSICION.- La suma de n términos consecutivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ es

$$S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}$$

Demostración:

En efecto, sea:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Si multiplicamos los dos miembros por r, tenemos

$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_n \cdot r$$

Restando miembro a miembro,

$$S_n - r \cdot S_n = a_1 - a_n \cdot r$$

de donde:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 - a_n \cdot r}{1 - r}}$$ q.q.d.

Si queremos expresar S_n en función de a_1 exclusivamente, tenemos que:

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 \cdot r^{n-1} \cdot r}{1 - r} = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

37-8 SERIES INFINITAS

Sea (a_n) una sucesión de números reales. A partir de esta sucesión vamos a formar otra sucesión (S_n) del siguiente modo:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

37-8.1 DEFINICION.- La sucesión (a_n) es sumable, si la sucesión (S_n) converge. En este caso el $\lim_{n \to \infty} S_n$ se designa por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

y recibe el nombre de suma de la sucesión (a_n). En lenguaje menos preciso a la suma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se le llama serie infinita.

37-8.1 PROPOSICION.- Si (a_n) es una progresión geométrica (a_n) es sumable sii $|r| < 1$, donde r es la razón de la progresión.

Demostración: Sea $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ la progresión geométrica.

Para que (a_n) sea sumable, tiene que existir el límite de S_n.

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - r^n}{1 - r} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = a_1 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

$$\lim r^n = \begin{cases} 0 & \text{si } |r| < 1 \\ \infty & \text{si } |r| > 1 \\ \text{no existe} & \text{si } r = -1 \end{cases}$$

Por tanto, el único caso de existencia de límite (si $r \neq 1$) es cuando $|r| < 1$ de lo que se deduce que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1 - r} \quad (|r| < 1)$$

Si $r = 1$ se tiene que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} (n \cdot a_1) = \infty$ (siempre que $a_1 \neq 0$).

Ejemplo: Ver si la sucesión $(a_n) = ((\frac{2}{3})^n)$ es sumable.

Como $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{2}{3})^n = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 2$$

37-9 PROGRESIONES HIPERGEOMETRICAS.

Se llama progresión hipergeométrica, a toda sucesión $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n, \ldots$ en la cual el cociente de cada término por el anterior es una expresión lineal en n de la forma:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$$

siendo α, β, γ números fijos, con la única condición de que α y γ no sean nulos simultáneamente.

Si a 'n' en esta expresión, le damos los valores 1, 2, 3. $\ldots$, n-1 tenemos:

$$a_1(\alpha+\beta) = a_2(\alpha+\gamma)$$
$$a_2(2\alpha+\beta) = a_3(2\alpha+\gamma)$$
$$a_3(3\alpha+\beta) = a_4(3\alpha+\gamma)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{m-1}\left[(m-1)\alpha+\beta\right] = a_m\left((m-1)\alpha+\gamma\right)$$

Sumando y suprimiendo los términos: $a_2\alpha$; $2a_3\alpha$; $3a_4\alpha$; ... ...; $(m-1)a_m\alpha$ que figuran en ambos miembros, tenemos que:

$$(\alpha+\beta)(S_m - a_m) \quad S_m(\alpha+\beta) = a_m(m\alpha+\beta) + S_m\gamma - a_1\gamma$$

de donde:

$$\boxed{S_m = \frac{a_m(m\alpha+\beta) - a_1\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}}$$

CASO PARTICULAR: Si $\alpha = 0$ y $\gamma = 1$ tenemos la suma de una progresión geométrica.

Ejemplo: $S_m = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \ldots + m(m+1)$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+2}{n}, \quad \text{por tanto} \quad S_m = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}$$

$\alpha = 1, \gamma = 0, \beta = 2$

37-10. PROGRESIONES ARITMETICO-GEOMETRICAS

Se llama progresión aritmético-geométrica de números reales a una sucesión de números reales cuyo término general sea de la forma $\boxed{a_n = (an+b).x^n}$, donde a, b y x son números fijos y tales que a y x no se anulan simultáneamente.

Obsérvese que si hacemos $x = 1$ tenemos una progresión aritmética y si hacemos $a = 0$, tenemos una progresión geométrica.

Para ver cómo se obtiene $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ y ver si (a_n) es sumable, lo hacemos sobre un ejemplo:

Ejemplo 1.- Sea $(a_n) = (n.x^n)$; es decir $x, 2x^2, 3x^3, \ldots, nx^n, \ldots$

$$S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n \qquad (1)$$
$$x.S_n = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots + (n-1)x^n + nx^{n+1}$$

$$S_n - S_n.x = x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n - n.x^{n+1} =$$

$$S_n = \left[x\,\frac{1-x^n}{1-x} - n.x^{n+1}\right] : (1-x)$$

por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(x\,\frac{(1-x^n)}{(1-x)^2}\right) - \lim_{n\to\infty}\frac{n.x^{n+1}}{1-x}$$

por tanto, dicho límite existe cuando $|x|<1$ ya que $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $n.x^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

De donde:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n.x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Por generalización también se llama progresiones aritmético-geométricas a sucesiones cuyo término general sea de la forma $a_n = P(n).x^n$, donde $P(n)$ es un polinomio de variable natural. La forma de obtener S_n se hace de la misma forma que en el Ejemplo 1, teniendo en cuenta que el proceso (1) se reitera tantas veces como indica el grado del polinomio $P(n)$.

Ejemplo 2.- Sea $(a_n) = (n^2.x^n)$; es decir, $x, 4x^2, 9x^3, \ldots$ ...; $n^2.x^n, \ldots$

$$S_n = x + 4x^2 + 9x^3 + \ldots + n^2.x^n$$
$$x.S_n = x^2 + 4x^3 + 9x^4 + \ldots + (n-1)^2x^n + n^2x^{n+1}$$

restando miembro a miembro

$$S_n(1-x) = x + 3x^2 + 5x^3 + \ldots\ldots\ldots + (2n-1)x^n - n^2x^{n+1}$$
$$x.S_n(1-x) = x^2 + 3x^3 + \ldots \ldots + (2n-1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}$$

Restando: $S_n(1-x)^2 = x + 2x^2\,\frac{1-x^{n-1}}{1-x} + (-n^2-2n+1)x^{n+1} + n^2x^{n+2}$

de donde

$$S_n = \frac{x}{(1-x)^2} + 2x^2\,\frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^3} + \frac{(-n^2-2n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2} + \frac{n^2.x^{n+2}}{1-x^2}$$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ existe si $|x|<1$, de donde

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2.x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x(1}{(1-}$$

---oOo---